Matematiikan harjoitustehtäviä (taloustiede/tilastotiede 2015)

Kirjoittaja: Joose Sauli

Julkaisija: Varjovalmennus 2015

ALKUSANAT

Nämä harjoitustehtävät on suunniteltu ylioppilaalle, joka valmistautuu Helsingin yliopiston valtiotieteellisen tiedekunnan taloustieteen ja tilastotieteen valintakokeeseen 26.5.2015.

Heti alkuun on sanottava, että näiden tehtävien hyödyllisyys vaihtelee käyttäjästä toiseen. Jos tehtävät tuntuvat aivan liian vaikeilta, saattaa olla parempi, ettet tuhlaa niihin aikaasi. Varsinkin viimeisessä luvussa on myös varsin vaikeita tehtäviä, joiden hyödyllisyydestä pääsykokeessa ei ole mitään takeita.

Valt. tdk:n nettisivuilta löytyy vanhoja pääsykokeita sekä niiden arvosteluperusteet. Niitä kannattaa katsoa—eikä kannata pelästyä, sillä kaikki niissä tarvittavat taidot ovat opittavissa.

Derivointi on opeteltavissa lukion matematiikan kirjoista. Siitä on kirjoitettu niin monta kirjaa, etten ala tässä kirjoittamaan vielä yhtä, vaan keskitymme harjoitustehtäviin. Lähdemme liikkeelle yksinkertaisista tehtävistä ja etenemme vaikeampiin. Jos et muista jonkun funktiomuodon derivointia, katso MAOLista tai vanhoista lukion kirjoistasi. Lukion matikankirjoja löytyy myös kirjastosta.

Varaa riittävästi aikaa, että ehdit tehdä tarpeeksi tehtäviä. On realistista olettaa, että näiden tehtävien tekemiseen menee useita päiviä, kenties jopa kokonainen viikko. Se ei suinkaan ole mitään hukkaan mennyttä aikaa: harjoitus on tärkeää, sillä pääsykokeessa on niukasti aikaa, eikä laskuvirheisiin ole siksi varaa.

Käteviä resursseja netissä:

- derivaattalaskuri: www.derivative-calculator.net
- graafien piirtäminen: www.desmos.com/calculator

1 DERIVOINTI

1.1 POLYNOMIFUNKTIO

Derivoitaessa kantaluku kerrotaan potenssillaan ja potenssista vähennetään yksi.

1. Olkoon $f(x) = x^2$. Laske
    a. $f(6)$
    b. $f'(x)$
    c. $f'(6)$
2. Olkoon $f(x) = x^3$. Laske
    a. $f(3)$
    b. $f'(x)$
    c. $f'(3)$
3. Olkoon $f(x) = x^4$. Laske
    a. $f(2)$
    b. $f'(x)$
    c. $f'(2)$
4. Derivoi funktio: $f(x) = 6x^4$
5. Derivoi funktio: $f(x) = 3x^5 + 3x$
6. Laske edellisen tehtävän funktion derivaatan arvo, kun $x = 2$.
7. Derivoi funktio: $f(z) = 100z^{10} - 3z + 250$
8. Derivoi funktio: $f(\mu) = \mu^5 - \mu^4 + \mu^3 - \mu^2 + \mu - 1$
9. Mitä tarkoitetaan a) kasvavalla, b) vähenevällä funktiolla? Millaiset kuvaajat niillä on?
10. Millainen on funktion kuvaajan muoto kohdassa, jossa funktion derivaatta on
    a. positiivinen
    b. negatiivinen
    c. nolla
    d. positiivinen ja itseisarvoltaan pieni
    e. positiivinen ja itseisarvoltaan suuri
    f. negatiivinen ja itseisarvoltaan pieni
    g. negatiivinen ja itseisarvoltaan suuri?
11. Erään funktion $f(x)$ derivaatan arvo on 3. Paljonko funktion arvo kasvaa, jos x:n arvo kasvaa a) yhdellä, b) 0,2:lla?
12. Jos $f(50) = 4$ ja $f'(50) = 2$, niin paljonko—suunnilleen—on $f(51)$?

1.2 MUUT POTENSSIFUNKTIOT

Sama kuin edellisessä.

13. Derivoi funktio: $f(x) = x^{-1}$
14. Derivoi funktio: $f(x) = \frac{1}{x}$
15. Derivoi funktio: $f(x) = \frac{5}{x^2} - x$
16. Derivoi funktio: $f(y) = y^{1,7}$
17. Derivoi funktio: $f(x) = x^{-1,7}$
18. Derivoi funktio: $f(x) = \sqrt{x}$
19. Derivoi funktio: $f(x) = 7x^3 + 5\sqrt{x} - 10$
20. Derivoi funktio: $f(x) = ax^b + cx^d$
21. Funktio f saadaan funktioiden g ja h summana. Miten f:n derivaatta saadaan g:n ja h:n derivaatoista?

1.3 TULOSÄÄNTÖ (KAHDEN FUNKTION TULON DERIVOINTI)

Kumpikin funktio kerrotaan toisen derivaatalla, ja näin saadut tulokset lasketaan yhteen.

22. Derivoi: $f(x) = g(x) \cdot h(x)$
23. Olkoon funktio $f(x) = 7x^3 \cdot x^k$
    a. Derivoi f tulosäännön avulla.
    b. Derivoi f ilman tulosääntöä muuntamalla f ensin muotoon, jossa tulosääntöä ei tarvita.
24. Olkoon funktio $f(x) = 10x^{30} \cdot \sqrt{x}$
    a. Derivoi f tulosäännön avulla.
    b. Derivoi f ilman tulosääntöä muuntamalla f ensin muotoon, jossa tulosääntöä ei tarvita.

1.4 KETJUSÄÄNTÖ (YHDISTETYN FUNKTION DERIVOINTI)

Yhdistetyn funktion derivaatta on ulkofunktion derivaatta kertaa sisäfunktion derivaatta.

25. Derivoi funktio: $f(x) = h(g(x))$
26. Olkoon funktio $f(x) = \sqrt{9x^4}$
    a. Derivoi f ketjusäännön avulla.
    b. Derivoi f ilman ketjusääntöä muuntamalla f ensin muotoon, jossa ketjusääntöä ei tarvita.

27. Olkoon funktio $f(x) = \left(\frac{3}{x}\right)^3$

    a. Derivoi f ketjusäännön avulla.

    b. Derivoi f ilman ketjusääntöä muuntamalla f ensin muotoon, jossa ketjusääntöä ei tarvita.

28. Derivoi funktio: $f(x) = \sqrt{5x^2 + x}$

1.5 EKSPONENTTIFUNKTIO

Näissä tehtävissä—ensimmäistä lukuunottamatta—tarvitset ketjusääntöä. Huom: merkintä $\exp(x)$ tarkoittaa samaa kuin e^x.

29. Derivoi funktio: $f(x) = e^x$

30. Derivoi funktio: $f(x) = e^{4x}$

31. Derivoi funktio: $f(x) = \exp(6x^3)$

32. Derivoi funktio: $f(x) = 4^x$

    Vihje: $4 = e^{\ln(4)}$

1.6 LOGARITMIFUNKTIO

Taas tarvitaan ketjusääntöä (paitsi ensimmäisessä kohdassa).

33. Derivoi funktio: $f(x) = \ln(x)$

34. Derivoi funktio: $f(x) = 4\ln(5x^2)$

35. Derivoi funktio: $f(x) = \ln(x^2 + x) + x$

1.7 FUNKTION TOINEN DERIVAATTA

Funktion *toinen derivaatta* on funktion *derivaatan derivaatta*.

36. Laske funktion toinen derivaatta: $f(x) = 4x^2$

37. Laske funktion toinen derivaatta: $f(x) = 50x^5$

38. Jatkoa tehtävään 10.

    a. Funktion $f(x)$ derivaatta on positiivinen, mutta pienenee x:n kasvaessa. Millainen on funktion $f(x)$ kuvaaja?

    b. Funktion $g(x)$ derivaatta on negatiivinen vakio. Millainen on funktion $g(x)$ kuvaaja?

39. Laske funktion toinen derivaatta: $f(x) = g(x) - h(x)$

40. Laske funktion toinen derivaatta: $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

41. Laske funktion toinen derivaatta: $f(y) = y^7 + 3y^2 + y$

42. Laske funktion toinen derivaatta: $f(z) = \frac{10}{z}$

43. Laske funktion toinen derivaatta: $h(z) = \sqrt{z}$

44. Laske funktion toinen derivaatta: $h(z) = e^{6z}$

45. Laske funktion toinen derivaatta: $h(z) = 3\ln(z)$

46. Millainen on funktion kuvaajan muoto kohdassa, jossa funktion
    a. ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat positiiviset
    b. ensimmäinen derivaatta on positiivinen, toinen derivaatta negatiivinen
    c. ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat negatiiviset
    d. ensimmäinen derivaatta on negatiivinen, toinen derivaatta positiivinen
    e. ensimmäinen derivaatta on nolla, toinen derivaatta positiivinen
    f. ensimmäinen derivaatta on nolla, toinen derivaatta negatiivinen

1.8 SOVELLUKSIA

47. Kilpa-auto lähtee liikkeelle hetkellä $t = 0$. Sen etäisyys s lähtöviivalta on ajan t funktio: $s(t) = 5t^2$

    a. Mikä funktio $v(t)$ kertoo auton nopeuden v ajan funktiona?

    b. Mikä funktio $a(t)$ kertoo auton kiihtyvyyden a ajan funktiona?

48. Yrityksen kustannukset C riippuvat tuotetusta määrästä q eli ovat määrän funktio: $C = C(q)$. Rajakustannus on tämän derivaatta eli $C'(q)$.

    Muodosta rajakustannusfunktio, kun kustannusfunktio on

    a. $C(q) = 1000 + 2q + 0{,}1q^2$

    b. $C(q) = 300 + 3q$

49. Yrityksen tulot R saadaan hinnan p ja myydyn määrän q tulona. Siis $R = pq$. Toisaalta mitä suurempi on tuotantomäärä q, sitä pienempi on hinnan oltava, jotta koko tuotanto saadaan myytyä. Hinta on siis määrän funktio: $p = p(q)$. Näin ollen tulot R riippuvat oikeastaan vain määrästä q eli ovat määrän funktio:

    $$R = R(q) = p(q) \cdot q$$

    Rajatulo saadaan tulofunktion derivaattana: rajatulo $= R'(q)$.

    Muodosta rajatulofunktio, kun kysyntäkäyrän yhtälö on $p(q) = 5 - \frac{1}{10}q$.

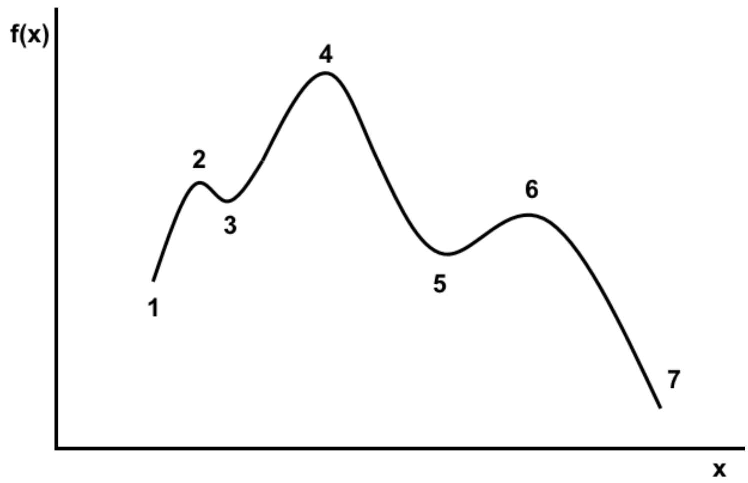
2 FUNKTION MINIMI- JA MAKSIMIKOHTIEN ETSIMINEN

Edellisessä luvussa kerrattiin funktion 1. ja 2. derivaatan laskemista. Näihin perustuu myös funktion minimi- ja maksimikohtien etsintä. Kuten tehtävän 46 e- ja f-kohdissa huomattiin:

- Funktiolla on minimikohta, kun ensimmäinen derivaatta on nolla ja toinen derivaatta on positiivinen. Funktion kuvaaja menee tällöin vaakaan, mutta on ylöspäin kaartuva. Se on siis U:n muotoinen eli minimikohta.
- Funktiolla on maksimikohta, kun ensimmäinen derivaatta on nolla ja toinen derivaatta on negatiivinen. Funktion kuvaaja menee tällöin vaakaan, mutta on alaspäin kaartuva. Se on siis ∩:n muotoinen eli maksimikohta.

Lisäksi, jos funktio ei ole kaikkialla määritelty vaan sen kuvaaja loppuu johonkin pisteeseen, reunapiste saattaa olla minimi tai maksimi. Se, onko reunapiste minimi vai maksimi, riippuu siitä, onko ensimmäinen derivaatta positiivinen vai negatiivinen ja siitä, onko kyseessä vasemman- vai oikeanpuoleinen reunapiste.

On vielä eroteltava toisistaan 1) *lokaalit* eli paikalliset ääriarvokohdat ja 2) *globaalit* ääriarvokohdat. Jokainen globaali minimi on myös lokaali minimi, ja jokainen globaali maksimi on myös lokaali maksimi. Sama ei kuitenkaan päde toisinpäin. Kuva selventänee asiaa:



Kuvassa 1) lokaali minimi, 2) lokaali maksimi, 3) lokaali minimi, 4) lokaali *ja globaali* maksimi, 5) lokaali minimi, 6) lokaali maksimi, 7) lokaali *ja globaali* minimi. Näistä 1 ja 7 ovat reunapisteitä, kun taas pisteitä 2–6 yhdistää se, että niissä 1. derivaatta on nolla ja 2. derivaatta on joko positiivinen tai negatiivinen.

Kaikilla funktioilla ei ole globaaleja ääriarvoja. Funktio voi saada esim. kaikki arvot miinus äärettömästä plus äärettömään. Funktiolla ei välttämättä ole edes lokaaleja ääriarvokohtia; tällainen funktio on esim. $f(x) = 5x$, joka on nouseva suora.

2.1 Polynomifunktio

Etsi seuraavien funktioiden lokaalit ja globaalit ääriarvokohdat, jos niillä ylipäänsä on sellaisia. Laske myös funktioiden arvot ääriarvokohdissa.

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = -x^2 + x + 3$
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$
4. $g(y) = 100y^3 - 100y^2 - 100y + 100$

2.2 Rajoitettu polynomifunktio

Etsi seuraavien funktioiden lokaalit ja globaalit ääriarvokohdat, jos niillä ylipäänsä on sellaisia. Laske myös funktioiden arvot ääriarvokohdissa.

5. $f(x) = 2x + 1$, rajoitettuna siten että $-1 \leq x \leq 4$
6. $f(x) = x^2$, rajoitettuna siten että $-2 \leq x \leq 3$
7. $f(x) = -x^2 + x + 3$, rajoitettuna siten että $-5 \leq x \leq 5$
8. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$, rajoitettuna siten että $-5 \leq x \leq 5$
9. $g(y) = 100y^3 - 100y^2 - 100y + 100$, rajoitettuna siten että $y \geq 0$

2.3 Muut jatkuvat funktiot

Etsi seuraavien funktioiden lokaalit ja globaalit ääriarvokohdat, jos niillä ylipäänsä on sellaisia. Laske myös funktioiden arvot ääriarvokohdissa.

10. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$
11. $f(x) = \ln(x) - x$
12. $f(x) = e^x + e^{-x}$
13. $f(x) = \ln(x) + \ln\left(5 - \frac{1}{2}x\right)$

3 YRITYKSEN VOITONMAKSIMOINTI

Nyt alamme soveltaa oppimaamme taloustieteeseen. Taloustieteen pääsykokeessa on jo pitkään ollut joka vuonna tehtävä, jossa käsitellään yrityksen voitonmaksimointia. Siinä on voitu antaa esim. kysyntäkäyrän yhtälö ja kustannusfunktio, ja tehtävänä on laskea yrityksen voiton maksimoiva tuotantomäärä ja yrityksen voitto.

Miten näitä tehtäviä sitten ratkotaan? Muutama sääntö:

- Yrityksen myyntitulot $=$ hinta $\times$ määrä $= pq$
- Kysyntäkäyrä on funktio $p(q)$, joka kertoo, miten hinta p riippuu määrästä q
- Myyntitulofunktio on $R(q) = q \cdot p(q)$
- Rajatulo on derivaatta $R'(q)$ ja rajatulokäyrä on tämän derivaatan kuvaaja
- Kustannusfunktio on funktio $C(q)$, joka kertoo, mikä on kokonaiskustannusten määrä C kullakin tuotantomäärällä q
- Rajakustannus on derivaatta $C'(q)$ ja rajakustannuskäyrä on tämän derivaatan kuvaaja
- Yrityksen voittofunktio on funktio $\Pi(q)$, joka kertoo voiton Π määrän kullakin tuotantomäärällä q
- Voittofunktio muodostetaan myyntitulojen ja kokonaiskustannusten erotuksena: $\Pi(q) = R(q) - C(q)$
- Voiton maksimoimiseksi etsitään funktion $\Pi(q)$ maksimi, joka löytyy etsimällä derivaatan nollakohta: $\Pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 0$ eli $R'(q) = C'(q)$
- Huomaamme tästä, että voittofunktion maksimikohdassa rajatulo ja rajakustannus ovat yhtä suuret. Usein tämäntyyppisen tehtävän ratkaisemiseen onkin kaksi mahdollista menetelmää: 1) muodosta voittofunktio ja maksimoi se, tai vaihtoehtoisesti 2) muodosta rajatulon ja rajakustannuksen lausekkeet ja ratkaise yhtälö rajatulo $=$ rajakustannus.

3.1 METODI 1: MUODOSTA VOITTOFUNKTIO JA ETSI SEN MAKSIMI

1. Erään yrityksen voitto Π riippuu tuotannon määrästä q seuraavan yhtälön mukaisesti: $\Pi = -\frac{1}{3}q^2 + 6q - 20$.
   a. Mikä tuotantomäärä maksimoi yrityksen voiton?
   b. Paljonko voittoa yritys tuottaa optimisssa?

2. Kuten edellinen tehtävä, mutta nyt $\Pi = -\frac{1}{10}q^2 - q - 3$.

3. Yritys on täydellisessä kilpailussa. Sen tuotteen markkinahinta on $p = 5$. Yrityksen kustannusfunktio on $C(q) = 10 + 2q + \frac{1}{10}q^2$.
    a. Muodosta yrityksen tulofunktio, joka kertoo, miten yrityksen myyntitulot riippuvat tuotetusta määrästä q.
    b. Muodosta yrityksen voittofunktio, joka kertoo, miten yrityksen voitto riippuu määrästä q.
    c. Mikä tuotantomäärä maksimoi yrityksen voiton?
    d. Paljonko voittoa yritys tuottaa optimisssa?

4. Kuten edellinen tehtävä, mutta nyt $p = 4$ ja $C(q) = 100 + 2q + \frac{1}{100}q^2$.

5. Yritys on monopoli. Sen tuotteen hinta p riippuu myydystä määrästä q seuraavan yhtälön mukaisesti: $p = 12 - \frac{1}{2}q$. Kustannusfunktio on $C(q) = \frac{q^3}{27} + \frac{q^2}{4} + 3q + 12$.
    a. Muodosta yrityksen tulofunktio, joka kertoo, miten yrityksen myyntitulot riippuvat tuotetusta määrästä q.
    b. Muodosta yrityksen voittofunktio, joka kertoo, miten yrityksen voitto riippuu määrästä q.
    c. Mikä tuotantomäärä maksimoi yrityksen voiton?
    d. Paljonko voittoa yritys tuottaa optimisssa?
    e. Mikä on yrityksen tuotteen hinta optimissa?

6. Yritys A kuuluu kolmen yrityksen muodostamaan oligopoliin, joten se kohtaa laskevan kysyntäkäyrän. Yrityksen tuotteen kysytty määrä q_d riippuu hinnasta p seuraavan yhtälön mukaisesti: $q_d = 40 - 4p$. Yrityksen kokonaiskustannukset C riippuvat yritys A:n tuottamasta määrästä q_A seuraavan yhtälön mukaisesti: $C = \frac{1}{24}q^3 + \frac{1}{4}q^2 + 4q + 9$.
    a. Mikä tuotantomäärä maksimoi yrityksen voiton?
    b. Paljonko voittoa yritys tuottaa optimissa?

3.2 METODI 2: RAJATULO = RAJAKUSTANNUS

Kuten *Foundations of Economics* -kirjassa, käytämme merkintää *MR* viitataksemme rajatuloon (*marginal revenue*) ja merkintää *MC* viitataksemme rajakustannukseen (*marginal cost*). Siksi yrityksen voitonmaksimointia kuvaavissa diagrammeissa onkin usein piirretty *MR*-käyrä ja *MC*-käyrä.

Yrityksen *kohtaama* kysyntäkäyrä ei tarkoita koko markkinoiden kysyntäkäyrää, vaan käyrää, joka kertoo, kuinka paljon tuotettaan juuri tämä kyseinen yritys saa myytyä milläkin hinnalla (tai kääntäen, millä hinnalla mikäkin määrä saadaan myytyä).

7. Yrityksen kohtaaman kysyntäkäyrän yhtälö on $p = 8 - \frac{1}{5}q$. Muodosta rajatulokäyrän yhtälö.

8. Yrityksen kohtaaman kysyntäkäyrän yhtälö on $p = 8 - \sqrt{q}$. Muodosta rajatulokäyrän yhtälö.

9. Yrityksen kohtaaman kysyntäkäyrän yhtälö on $p = q^{-2/3}$. Muodosta rajatulokäyrän yhtälö.

10. Yrityksen kohtaaman kysyntäkäyrän yhtälö on $p = 10$. Muodosta rajatulokäyrän yhtälö.

11. Yrityksen kustannusfunktio on $C(q) = 100 + 0{,}75q$. Muodosta rajakustannuskäyrän yhtälö.

12. Yrityksen kustannusfunktio on $C(q) = 0{,}025q^2 + 0{,}91q + 850$. Muodosta rajakustannuskäyrän yhtälö.

13. Yrityksen kustannusfunktio on $C(q) = \frac{1}{300}q^3 - \frac{1}{10}q^2 + 4q + 60$. Muodosta rajakustannuskäyrän yhtälö.

    Tässä rajakustannuskäyrässä on jotain erikoista. Se on hieman ristiriidassa sen kanssa, mitä *Taloustieteen oppikirjassa* sanotaan rajakustannuksista. *Foundations of Economicsissa* sen sijaan on tällaisia rajakustannuskäyriä, esim. sivulla 158. Mikä tämä erikoisuus on?

14. Yrityksen kohtaaman kysyntäkäyrän yhtälö on $p = 15 - q$. Kustannukset riippuvat tuotannosta seuraavan yhtälön mukaisesti: $C = \frac{1}{10}q^2 + 4q + 10$.
    a. Muodosta rajatulokäyrä.
    b. Muodosta rajakustannuskäyrä.
    c. Ratkaise a- ja b-kohtien avulla, mikä on yrityksen optimaalinen tuotantomäärä.
    d. Kuinka suuri on yrityksen voitto optimissa?
    e. Mikä on yrityksen tuotteen hinta optimissa?

15. Sama kuin edellinen tehtävä, mutta nyt kysyntäkäyrän yhtälö on $p = 12 - \frac{1}{3}q$ ja kustannusfunktio on $C(q) = \frac{1}{12}q^3 - \frac{1}{2}q^2 + 5q + 16$.

3.3 KUSTANNUSFUNKTION JOHTAMINEN TUOTANTOFUNKTIOSTA

Pääsykokeeseen voi tulla tehtävä, jossa on annettu yrityksen tuotantofunktio, ja sitä on sitten käytettävä voiton maksimoinnissa.

Mikäli tuotantofunktiossa on vain yksi muutettavissa oleva tuotannontekijä, kustannusfunktion johtaminen ei luultavasti ole kovinkaan monimutkaista. Jos ainoa tuotannontekijä, jonka määrää yritys voi muuttaa, on esim. työ L, toimi näin:

- Ratkaise L tuotantofunktion yhtälöstä, jolloin saat yhtälön, joka kertoo, miten L riippuu q:sta. Yhtälö on muotoa $L = f(q)$.

- Sijoita $f(q)$ yhtälöön, joka kertoo, miten yrityksen kustannukset C riippuvat L:stä ja muista tuotannontekijöistä. Saat yhtälön, joka on muotoa $C = g(q)$. Tässä sinulla on kustannusfunktio.

Kokeillaan tätä.

16. Yritys käyttää vain yhtä tuotannontekijää: työtä. Tuotantofunktio on $q = \sqrt{L}$, missä L on työpanoksen määrä. Palkka per työn yksikkö on $w = 5$. Muodosta kustannusfunktio.

17. Jatkoa edelliseen tehtävään. Yritys on täydellisessä kilpailussa, ja sen valmistaman hyödykkeen markkinahinta on $p = 180$. Millä tuotantomäärällä voitto maksimoituu ja paljonko voittoa yritys tällöin tuottaa?

Kokeillaan seuraavaksi tapausta, jossa on muitakin tuotannontekijöitä.

18. Yritys käyttää kolmea tuotannontekijää eli työtä L, pääomaa K ja välituotteita M. Tuotantofunktio on $q = F(L, K) = L^{0,5}K^{0,25}$, ja välituotteiden käyttö määräytyy suoraan tuotannon mukaan: $M = 0{,}5q$.

    Tuotantopanosten hinnat ovat $w = 5$, $r = 2$ ja $s = 3$.

    Muodosta lyhyen aikavälin kustannusfunktio seuraavien oletusten pohjalta: pääoman määrää ei voida lyhyellä aikavälillä muuttaa, vaan sen määrä on vakio: $K = 16$, sen sijaan työpanoksen ja välituotteiden määrää voidaan muuttaa vapaasti.

3.4 Optimaaliset panosmäärät

Miten työn rajatuottavuus mahdetaan johtaa tuotantofunktiosta? No derivoimalla tietenkin. Kun tuotantofunktio derivoidaan työn L suhteen, saadaan työn rajatuottavuus. Siis,

työn rajatuottavuus (*marginal product of labor*) $= MPL = \frac{d}{dL}F(K, L, M)$

Huom: kun usean muuttujan funktio derivoidaan *yhden muuttujan suhteen*, muita muuttujia kohdellaan ikään kuin ne olisivat vain jotain tuntemattomia vakioita.

Esim. jos $f(x, y) = x^2y^2 - 3xy + y$, niin $\frac{d}{dx}f(x, y) = 2xy^2 - 3y$ ja $\frac{d}{dy}f(x, y) = 2x^2y - 3x + 1$

19. Muodosta työn rajatuottavuusfunktio tehtävän 16 yritykselle.

20. *Taloustieteen oppikirjan* 6. luvussa kerrotaan, että täydellisessä kilpailussa oleva yritys käyttää sen määrän työvoimaa, jolla pätee yhtälö:

    työn rajatuottavuus × tuotteen hinta = palkka

    Tehtävässä 17 laskettiin yrityksen optimaalinen tuotantomäärä.

    a. Laske, millä työpanoksen määrällä tämä tuotantomäärä saavutetaan.

    b. Osoita, että yllämainittu työpanoksen optimointiehto pätee, kun yritys maksimoi voittonsa.

Tarkastellaan seuraavaksi vielä vähän vaikeampaa asiaa. Kun tuotantofunktiossa on kaksi tuotantopanosta, ja molempia voidaan muuttaa, miten ratkaistaan optimaaliset panosmäärät?

Vastaus on lopulta yksinkertainen. Pääoman suhteen pätee nimittäin sama kuin työnkin suhteen:

pääoman rajatuottavuus × tuotteen hinta = pääoman kustannus

Tämän ehdon toteutuessa pääoman määrä on optimaalinen. Ja pääoman rajatuottavuus saadaan tietenkin tuotantofunktion derivaattana.

21. Tämä tehtävä on suoraan vuoden 2013 pääsykokeesta.

    Yrityksen tuotantofunktio on $q = F(L, K) = \frac{1}{2}\ln(L) + \frac{1}{2}\ln(K)$ ja panosten hinnat ovat $w = 4$ ja $r = 3$. Yrityksen tuotteen hinta on $p = 12$. Ratkaise yrityksen voiton maksimoivat panosmäärät.

22. Jatkoa edelliseen tehtävään. Paljonko voittoa yritys tekee optimissa?

23. Vielä toinen tehtävä samasta aiheesta.

    Yrityksen tuotantofunktio on $q = F(L, K) = \sqrt{L} + 2\sqrt{K}$, ja panosten hinnat ovat $w = 4$ ja $r = 3$. Yrityksen tuotteen hinta on 12. Laske optimaaliset panosten määrät ja yrityksen voitto optimissa.

24. Vielä yksi tehtävä samasta aiheesta. Tämä tehtävä on teknisesti vaikeampi ja vaatii hyvää yhtälöiden ratkaisemisen taitoa.

    Yrityksen tuotantofunktio on $q = F(L, K) = \sqrt[3]{LK}$, ja panosten hinnat ovat $w = 4$ ja $r = 3$. Yrityksen tuotteen hinta on 12. Laske optimaaliset panosten määrät ja yrityksen voitto optimissa.

4 KULUTTAJAN HYÖDYNMAKSIMOINTI

Kuluttajan käyttäytymistä kuvataan *hyöty*- eli *utiliteettifunktiolla*. Hyötyfunktio kertoo, miten kuluttajan *hyöty* eli *utiliteetti* riippuu hänen kuluttamiensa hyödykkeiden määristä.

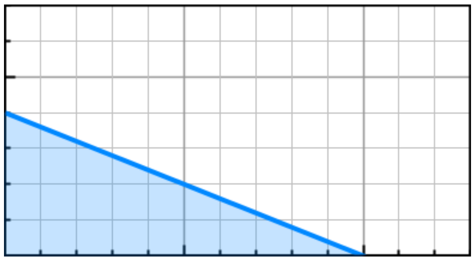
Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi tilannetta, jossa kuluttaja kuluttaa vain kahta hyödykettä: leipää ja maitoa. Merkitään leivänkulutusta x:llä ja maidonkulutusta y:llä. Olkoon $U(x, y)$. Tämän funktion pitäisi olla kasvava sekä x:n että y:n suhteen, sillä enemmän on parempi, oli kyse sitten leivästä tai maidosta.

Leivän ja maidon rajahyödyt saadaan U:n derivaattoina. Leivän rajahyöty on $\frac{d}{dx}U(x, y)$ ja maidon rajahyöty on $\frac{d}{dy}U(x, y)$. Koska yleensä rajahyöty on aleneva, pitäisi näiden derivaattojen olla väheneviä.

Esim. seuraava funktio täyttää nämä vaatimukset: $U(x, y) = \sqrt{xy}$. Se on kasvava molempien argumenttien suhteen. Leivän rajahyöty on $\frac{d}{dx}U(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$, eli se vähenee leivänkulutuksen kasvaessa, ja vastaava pätee maidon suhteen.

Kulutusta kuitenkin rajoittaa *budjettirajoite*, joka riippuu 1) kuluttajan tuloista, 2) leivän hinnasta ja 3) maidon hinnasta. Tulot määräävät, paljonko rahaa on käytettävissä, ja hyödykkeiden hinnat määräävät, mitkä *hyödykekorit* ovat tällä rahalla saatavissa.

Esimerkiksi: olkoon tulojen määrä 20 (kuukaudessa), ja olkoon leivän hinta 2 ja maidon hinta 5 (per yksikkö). Tällöin kuukaudessa voidaan kuluttaa esim. 10 leipää tai 4 maitoa—tai jokin yhdistelmä näiden väliltä. Mikä tahansa kulutusyhdistelmä (x, y), joka toteuttaa seuraavan ehdon: $2x + 5y \leq 20$, on mahdollinen. Tämä ehto on nimeltään budjettirajoite, ja se sanoo, että leipään käytetty rahamäärä plus maitoon käytetty rahamäärä yhteensä voivat olla korkeintaan 20. Se voidaan esittää (x, y)-koordinaatistossa näin:



Utiliteettifunktion avulla voimme selvittää, minkä leipä-maitoyhdistelmän kuluttaja valitsee. Tähän on useita matemaattisia menetelmiä, monet niistä aika monimutkaisia. Tässä valitsemme kaikkein helpoimman tien: voimme olettaa, että kuluttaja valitsee jonkun pisteen kuvassa näkyvältä budjettisuoralta, sillä enemmänhän on parempi.

Mutta minkä pisteen? No, suoralla pätee yhtälö $y = 4 - 0{,}4x$, joten voimme sijoittaa tämän utiliteettifunktioon $\Rightarrow$ $U(x, y) = \sqrt{x(4 - 0{,}4x)}$ ja etsiä sille maksimin.

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{4x - 0{,}4x^2}\right) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{4x-0{,}4x^2}} \cdot (4 - 0{,}8x) = \frac{1-0{,}2x}{\sqrt{x-0{,}1x^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

Optimissa siis $x = 5$ ja siten $y = 2$.

Harjoitellaan tätä.

4.1 BUDJETTIRAJOITE

1. Ollilla on kuukausittain käytettävissä 60 euroa ruokaan ja juomaan. Ruoan hinta on 4 euroa/yksikkö, juoman hinta on 5 euroa/yksikkö. Mikä on Ollin kuukausittainen budjettirajoite, jos merkitään ruoan kulutusta x:llä ja juoman kulutusta y:llä?

2. Kuluttaja kuluttaa kahta hyödykettä: hyödykkeitä A ja B. Merkitsemme näiden määriä x_A:lla ja x_B:llä. Hyödykkeen A hinta on p_A ja hyödykkeen B hinta on p_B. Kuluttajan tuloja merkitsemme symbolilla M. Mikä on nyt budjettirajoite?

3. Tutkitaan nyt kolmen hyödykkeen tapausta: kuluttaja kuluttaa kolmea hyödykettä, joiden määriä merkitsemme symboleilla x_1, x_2 ja x_3. Niiden hintoja merkitsemme symboleilla p_1, p_2 ja p_3. Kuluttajan tulot ovat M. Mikä on nyt budjettirajoite?

4. Tässä tehtävässä tarkastelemme vapaa-aikaa ja kulutusta. Tulkitsemme nämä hyödykkeiksi: vapaa-aika on itsessään hyödyke, ja kaikki muut hyödykkeet niputamme yhdeksi ”sekahyödykkeeksi”, jota kutsumme nimellä ”kulutus”.

   Veronikalla on viikoittain käytettävissä 80 tuntia vapaa-aikaan ja työntekoon. Vapaa-aika on itsessään hyödyke, kun taas työnteosta Veronika saa palkkaa 10 euroa/tunti.

   Jos C on kulutus euroina ja F on vapaa-aika tunneissa mitattuna, mikä on Veronikan budjettirajoite?

4.2 RAJAHYÖTYFUNKTION JOHTAMINEN

5. Jatkoa tehtävään 1. Ollin hyötyfunktio on $U(x,y)=\sqrt{xy}$. Muodosta funktio, joka kertoo, miten leivän rajahyöty riippuu leivänkulutuksesta x.

6. Sama kuin edellinen tehtävä, mutta nyt $U(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$.

7. Sama kuin edellinen tehtävä, mutta nyt $U(x,y)=\ln(xy)$.

4.3 KULUTTAJAN HYÖDYN MAKSIMOIMINEN

8. Jatkoa tehtävään 1. Ollin hyötyfunktio on $U(x,y)=\sqrt{xy}$. Kuinka paljon ruokaa ja kuinka paljon juomaa Olli kuluttaa kuukaudessa?

9. Sama kuin edellinen tehtävä, mutta nyt $U(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$.

10. Korhoset tuottavat kahta hyödykettä: leipää ja maitoa. Yhden maitolitran tuottamiseen menee 1 tunti, leipäkilon tuottamiseen menee 8 tuntia. Viikossa tuotantoon on käytettävissä 40 tuntia.

    Merkitään leivänkulutusta x:llä ja maidonkulutusta y:llä. Jos Korhosten hyötyfunktio on $U(x,y)=\ln(x^2y)$, minkä yhdistelmän maitoa ja leipää he valitsevat? (Oletamme, ettei vaihdanta ole mahdollista.)

11. Oletetaan nyt, että Korhoset voivat hankkia maitoa ja leipää myös vaihdannan kautta. Oletetaan, että maitolitran hinta on 5 € ja leipäkilon hinta 20 €. Kuinka paljon maitoa ja leipää Korhoset tuottavat, ja kuinka paljon he niitä kuluttavat?

5 TODENNÄKÖISYYSLASKENTA JA TILASTOTIEDE

Taloustieteen pääsykokeessa on useammankin kerran viime vuosina ollut tehtävä, jossa pitää tulkita *hajontakuviota* ja sovittaa siinä näkyviin havaintoihin *regressiosuora*. Nämä ovat tilastotieteen käsitteitä.

Tänä vuonna taloustieteessä ja tilastotieteessä on yhteinen pääsykoe, joten kokeessa saattaa olla aiempaa enemmän tilastotieteellisiä aiheita. *Ehkä*. Emme voi tietää tätä etukäteen, joten on vaikea sanoa, paljonko tähän aiheeseen tulisi panostaa. Jos tehtävät alkavat tuntua liian vaikeilta, on sinun parempi lakata haaskaamasta niihin aikaa.

Allaolevat tehtävät on tarkoitettu niille, jotka haluavat treenata keskeisimpiä tilastotieteen käsitteitä. Apua löytyy MAOLista, lukion kirjoista ja Wikipediasta.

5.1 KESKIARVO, MOODI JA MEDIAANI

1. Pienen opetusryhmän jäsenten koearvosanat olivat: 10, 10, 9, 9, 9, 9, 8, 7, 7, 7, 5. Mikä oli ryhmän koearvosanojen
   a. keskiarvo
   b. moodi
   c. mediaani?

2. Suuren opetusryhmän koearvosanoissa oli seitsemän kymppiä, 19 ysiä, 30 kasia, 24 seiskaa, 11 kutosta, kahdeksan viitosta ja 42 nelosta. Mikä oli ryhmän koearvosanojen
   a. keskiarvo
   b. moodi
   c. mediaani?

3. Kuulemma noin 80 % autoilijoista pitää itseään keskimääräistä parempana kuskina. Onko matemaattisesti mahdollista, että he kaikki olisivat oikeassa?

5.2 PAINOTETTU KESKIARVO

4. Olli on suorittanut yliopistossa seuraavat viisi kurssia:

Kurssi	Laajuus (op)	Arvosana
Johdatus yliopistomatematiikkaan	4	5
Mikrotalousteorian perusteet	6	4
Orientoivat opinnot	3	3
Henkilökohtainen opintosuunnitelma	2	3
Tilastotieteen johdantokurssi	6	5

   Laske Ollin opintopisteillä painotettu keskiarvo.

5. Liisa on sijoittanut 50 % säästöistään osakerahastoon, 25 % korkorahastoon ja 3 % BitCoiniin. Loput ovat pankkitilillä. Viime vuonna hänen osakerahasto-osuuksiensa arvo nousi 13.2 %, korkorahasto-osuuksien arvo nousi 4.8 % ja BitCoinin arvo laski 58.2 %. Pankkitilin korko oli 0.1 %. Mikä oli Liisan säästöjen tuottoprosentti?

5.3 TODENNÄKÖISYYS

6. Mikä on varman tapahtuman todennäköisyys?

7. Mikä on mahdottoman tapahtuman todennäköisyys?

8. Tapahtumat A ja B ovat toisensa poissulkevia. Tapahtuman A todennäköisyys on p_A ja tapahtuman B todennäköisyys on p_B. Mikä on todennäköisyys sille, että
    a. tapahtuu A tai B
    b. tapahtuu A ja B
    c. ei tapahdu A
    d. ei tapahdu A eikä B
    e. ei tapahdu sekä A että B
    f. tapahtuu A, muttei B?

9. Kuten edellinen tehtävä, mutta oletetaan nyt, että A ja B ovat toisistaan riippumattomia.

10. Jos heitetään kolikkoa kaksi kertaa, mikä on todennäköisyys sille, että
    a. molemmilla heitoilla tulee klaava
    b. yhdellä heitolla tulee kruuna ja toisella klaava
    c. ensimmäisellä heitolla tulee kruuna ja toisella klaava?

11. Kuinka todennäköistä on saada nopalla
    a. kutonen, kun heitetään vain kerran
    b. vitonen *tai* kutonen, kun heitetään vain kerran
    c. vähintään yksi kutonen, kun heitetään kaksi kertaa
    d. yhteensä 11, kun heitetään kaksi kertaa
    e. yhteensä *vähintään* 11, kun heitetään kaksi kertaa?

12. Jos vedät sekoitetusta korttipakasta viisi korttia, mikä on todennäköisyys sille, että ne ovat kaikki samaa maata? (Pakassa ei ole jokereita.)

13. Eräässä amerikkalaisessa pikkukaupungissa 60 % asukkaista äänestää republikaaneja ja loput demokraatteja. Kaikki lukevat joko *Postia* tai *Tribunea*, mutta kukaan ei lue molempia lehtiä. Demokraattien äänestäjistä 90 % lukee *Tribunea*. *Tribunea* lukee kaikista kaupunkilaisista 56 %.
    a. Jos valitaan republikaaniäänestäjien joukosta umpimähkään joku, kuinka todennäköistä on, että tämä lukee *Tribunea*?
    b. Jos valitaan *Postin* lukijoista umpimähkään joku, kuinka todennäköistä on, että tämä äänestää republikaaneja?

14. Jokaisessa muropaketissa on lelu. Leluja on viidenlaisia, eikä yksikään ole muita tavallisempi eikä muita harvinaisempi. Jos ostat kolme muropakettia, mikä on todennäköisyys sille, että
    a. saat kolme erilaista lelua
    b. saat kaksi samanlaista lelua ja yhden erilaisen
    c. saat kolme samanlaista lelua?

15. Todennäköisyys joutua sairaalaan on 2 %. Todennäköisyys sairastua on 10 %. Ehdollinen todennäköisyys joutua sairaalaan ehdolla, ettei ole sairastunut, on 0,5 %. Mikä on ehdollinen todennäköisyys joutua sairaalaan ehdolla, että on sairastunut?

5.4 ODOTUSARVO

16. Mikä on yksittäisen nopanheiton silmäluvun odotusarvo?

17. Mikä on kahden nopanheiton silmälukujen summan odotusarvo?

18. Kulhossa on kolmepaperinpalaa, joihin on merkitty numerot yhdestä kolmeen. Jos otat kulhosta umpimähkään kaksi paperinpalaa, mikä on niissä olevien lukujen summan odotusarvo?

19. Kuten edellinen tehtävä, mutta nyt kulhossa on paperinpalat 1–6, joista nostat umpimähkään kolme. Mikä on nostamiesi numeroiden summan odotusarvo?

20. Eräässä arpapelissä sinulla on 1 % mahdollisuus voittaa 500 euroa, 9 % mahdollisuus voittaa 20 euroa ja 90 % mahdollisuus olla voittamatta mitään. Jos osallistut, mikä on saamasi voittosumman odotusarvo?

21. Satunnaisluvun X odotusarvo on μ_X ja satunnaisluvun Y odotusarvo on μ_Y. Satunnaisluku Z määräytyy X:n ja Y: perusteella siten, että $Z = aX + bY + c$, missä a, b ja c ovat vakioita. Mikä on Z:n odotusarvo?

5.5 OTANNAN JA MITTAAMISEN PERUSKÄSITTEITÄ

22. Suomalaisten poliittisten puoluiden kannatusta mittaavassa tutkimuksessa kysytään 2000:lta satunnaisesti valitulta äänioikeutetulta suomalaiselta, mitä puoluetta he äänestäisivät, jos eduskuntavaalit pidettäisiin nyt. Samalla kysytään mm. heidän ikänsä, tulotasonsa, sukupuolensa ynnä muita tietoja. Mitä tässä kyselyssä ovat
    a. perusjoukko
    b. otos
    c. tilastoyksiköt eli havainnot
    d. muuttujat
    e. otantamenetelmä?

23. Jatkoa edelliseen tehtävään.
    a. Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan otoksen olevan *edustava*?
    b. Millä tavoin edellisen tehtävän otoksen edustavuutta voitaisiin arvioida?
    c. Olettaen, että otos on edustava, millaista *tilastollista päättelyä* otoksen pohjalta voidaan tehdä (anna esimerkkejä)?
    d. Mitä tarkoittaa *satunnaishajonta* ja miten se on otettava huomioon tilastollisessa päättelyssä?

24. Mitä tarkoitetaan *kvalitatiivisella* ja *kvantitatiivisella* muuttujalla?

25. Milloin muuttujan mittausmenetelmä on *objektiivinen*?

26. Luettele neljä *mitta-asteikkoa*, joilla eri muuttujia voidaan mitata. Mikä on näiden mitta-asteikkojen keskinäinen hierarkia ja millä perusteella?

27. Jatkoa edelliseen tehtävään. Millä mitta-asteikolla kutakin seuraavista muuttujista mitataan?
    a. lämpötila Celsius-asteina
    b. bruttokansantuote euroina
    c. henkilön sukupuoli
    d. henkilön puoluekanta
    e. puolueen kannatus
    f. runon sijoitus runokilpailussa
    g. planeetan koko?

5.6 VARIANSSI JA KESKIHAJONTA

28. Laske seuraavan lukusarjan varianssi: 3, 10, 8, 4, 19, 4.

29. Laske edellisen tehtävän lukusarjan keskihajonta.

30. Oletetaan, että edellisen tehtävän luvut ovat muuttujan arvoja satunnaisotoksessa, joka on poimittu 100 yksilön suuruisesta perusjoukosta. Arvioi muuttujan varianssi ja keskihajonta perusjoukossa.

31. Noppaa heitetään yhden kerran. Laske silmäluvun varianssi ja keskihajonta.

5.7 HAJONTAKUVIO JA REGRESSIOSUORA

32. Piirrä hajontakuvioon seuraavan taulukon mukaiset pisteet. Mieti, mikä on selittävä muuttuja ja mikä on riippuva muuttuja.

Opiskelijanumero	Opiskeluun käytetty aika (h)	Koepisteet
01031626	30	10
01215195	30	20
01398006	105	43
01488736	95	36
01510095	55	53
01562072	115	56
01790765	140	50
01912973	90	36

33. Piirrä edellisen tehtävän hajontakuvioon regressiosuora *silmämääräisesti*.

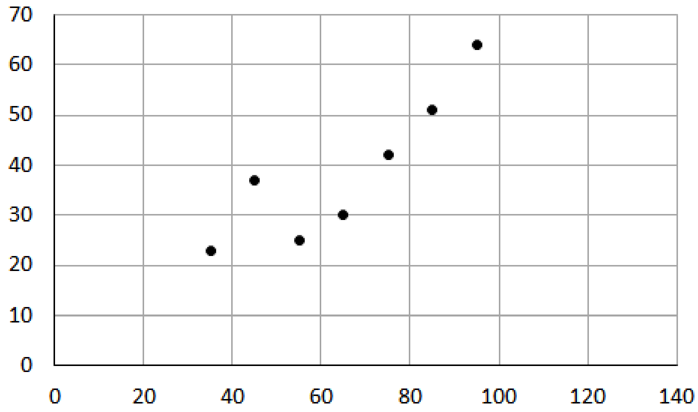
34. Mitä regressiosuora pyrkii kuvaamaan?

35. Regressiosuoran sovittaminen hajontakuvioon perustuu *pienimmän neliösumman periaatteeseen*. Selitä, mitä tämä tarkoittaa.

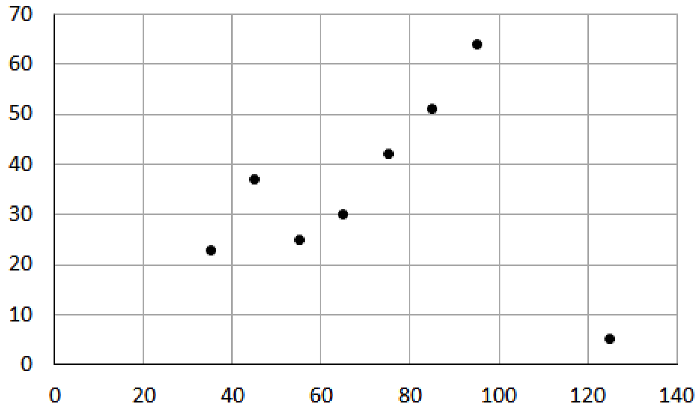
36. Miltä kuvio näyttäisi, jos selittävän ja riippuvan muuttujan roolit vaihdettaisiin keskenään?

37. Piirrä regressiosuorat seuraaviin kahteen kuvaan. Niillä on vain yksi ero, nimittäin b-kuvassa oikealla alhaalla olevan poikkeavan havainnon mukanaolo.

a.



b.



5.8 Kombinatoriikka

38. Kuinka moneen eri järjestykseen henkilöt voidaan laittaa, kun henkilöitä on
    a. kaksi
    b. kolme
    c. neljä
    d. sata?

39. Kuinka monta erilaista korttiyhdistelmää voit vetää korttipakasta, kun vetämiesi korttien järjestyksellä ei ole väliä, ja vetämiesi korttien määrä on
    a. kaksi
    b. kolme
    c. neljä?

40. Kulhossa on mustia ja valkoisia palloja, joita nostetaan kulhosta umpimähkään (eikä laiteta takaisin). Samanväriset pallot ovat keskenään identtisiä. Kuinka monta erilaista mustien ja valkoisten pallojen sarjaa kulhosta voidaan nostaa, kun
    a. mustia palloja on yksi ja valkoisia kaksi
    b. kumpaakin väriä on kaksi
    c. kumpaakin väriä on viisi
    d. mustia palloja on kymmenen ja valkoisia viisi?

5.9 KOMBINATORIIKKA JA TODENNÄKÖISYYS

41. Kuinka todennäköistä on saada korttipakasta kuningasvärisuora (siis ässä, kuningas, kuningatar, jätkä ja kymppi, kaikki samaa maata)?
42. Heität kolikkoa neljä kertaa. Merkitään näissä heitoissa saatujen klaavojen lukumäärää X:llä. Mitkä ovat X:n eri arvojen todenäköisyydet?
43. Heität noppaa neljä kertaa. Merkitään näissä heitoissa saatujen kutosten lukumäärää X:llä. Mitkä ovat X:n eri arvojen todennäköisyydet?