Matematiikan harjoitustehtävien ratkaisut (taloustiede/tilastotiede 2015)

Kirjoittaja: Joose Sauli

Julkaisija: Varjovalmennus 2015

1 DERIVOINTI

1.1 POLYNOMIFUNKTIO

1.
   a. $f(6) = 6^2 = 36$
   b. $f'(x) = 2x$
   c. $f'(6) = 2 \cdot 6 = 12$
2.
   a. $f(3) = 3^3 = 27$
   b. $f'(x) = 3x^2$
   c. $f'(3) = 3 \cdot 3^2 = 27$
3.
   a. $f(2) = 2^4 = 16$
   b. $f'(x) = 4x^3$
   c. $f'(2) = 4 \cdot 2^3 = 32$
4. $f'(x) = 24x^3$
5. $f'(x) = 15x^4 + 3$
6. $f'(2) = 15 \cdot 2^4 + 3 = 243$
7. $f'(z) = 1000z^9 - 3$
8. $f'(\mu) = 5\mu^4 - 4\mu^3 + 3\mu^2 - 2\mu + 1$
9. Kasvavan funktion arvo kasvaa, kun argumentti kasvaa. (Argumentilla tarkoitetaan muuttujaa, joka sijoitetaan funktioon. Funktiossa $f(x)$ argumentti on x.) Vähenevän funktion arvo vähenee argumentin kasvaessa. Kasvavan funktion kuvaaja nousee ylös oikealle; vähenevän funktion kuvaaja laskee alas oikealle.
10.
   a. nouseva
   b. laskeva
   c. ei nouseva eikä laskeva
   d. loivasti nouseva
   e. jyrkästi nouseva
   f. loivasti laskeva
   g. jyrkästi laskeva.
11. a) Funktion arvo kasvaa 3:lla. b) Funktion arvo kasvaa 0,6:lla.
12. $f(51) \approx f(50) + (51 - 50) \cdot f'(50) = 4 + 1 \cdot 2 = 6$

1.2 MUUT POTENSSIFUNKTIOT

13. $f'(x) = -x^{-2}$
14. $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
15. $f'(x) = -2 \cdot 5x^{-3} - 1 = -\frac{10}{x^3} - 1$
16. $f'(y) = 1{,}7y^{0{,}7}$
17. $f'(x) = -1{,}7x^{-2{,}7}$
18. $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
19. $f'(x) = 21x^2 + \frac{5}{2\sqrt{x}}$
20. $f'(x) = abx^{b-1} + cdx^{d-1}$
21. Funktion f derivaatta saadaan funktioiden g ja h derivaattojen summana. Toisin sanoen, jos $f(x) = g(x) + h(x)$, niin $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

1.3 TULOSÄÄNTÖ (KAHDEN FUNKTION TULON DERIVOINTI)

22. $f'(x) = g(x)h'(x) + g'(x)h(x)$
23.
    a. $f'(x) = 7x^3 \cdot kx^{k-1} + 21x^2 \cdot x^k = 7kx^{3+k-1} + 21x^{2+k}$
    b. $f(x) = 7x^{3+k} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 7(3+k)x^{2+k}$

    Molemmilla tavoilla saadaan siis sama vastaus.
24.
    a. $f'(x) = 10x^{30} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 300x^{29} \cdot \sqrt{x} = 5x^{29{,}5} + 300x^{29{,}5}$
    b. $f(x) = 10x^{30{,}5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 305x^{29{,}5}$

    Jälleen saatiin molemmilla tavoilla sama vastaus.

1.4 KETJUSÄÄNTÖ (YHDISTETYN FUNKTION DERIVOINTI)

25. $f'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$
26.
    a. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9x^4}} \cdot 36x^3 = \frac{1}{2 \cdot 3x^2} \cdot 36x^3 = 6x$
    b. $f(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x$

27.

a. $f'(x) = 3\left(\frac{3}{x}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right) = \frac{27}{x^2} \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right) = -\frac{81}{x^4}$

b. $f(x) = 9x^{-3} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -81x^{-4}$

28. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x^2+x}} \cdot (10x + 1)$

1.5 EKSPONENTTIFUNKTIO

29. $f'(x) = e^x$

30. $f'(x) = 4e^{4x}$

31. $f'(x) = 18x^2 \exp(6x^3)$

32. $f(x) = 4^x = \left(e^{\ln(4)}\right)^x = e^{\ln(4)x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \ln(4)\, e^{\ln(4)x}$

1.6 LOGARITMIFUNKTIO

33. $f'(x) = \frac{1}{x}$

34. $f'(x) = \frac{4}{5x^2} \cdot 10x$

35. $f'(x) = \frac{1}{x^2+x} \cdot (x + 1) + x = \frac{1}{x} + x$

1.7 FUNKTION TOINEN DERIVAATTA

36. $f''(x) = 8$

37. $f''(x) = 1000x^3$

38.

a. Kuvaaja on nouseva, mutta loiveneva (koska derivaatta eli kulmakerroin pienenee).

b. Kuvaaja on laskeva suora (koska derivaatta eli kulmakerroin pysyy vakiona).

39. $f''(x) = g''(x) - h''(x)$

40. $f''(x) = 18x + 4$

41. $f''(y) = 42y^5 + 6$

42. $f''(z) = \frac{20}{z^3}$

43. $h(z) = z^{0{,}5} \quad \Longrightarrow \quad h'(z) = 0{,}5z^{-0{,}5} \quad \Longrightarrow \quad h''(z) = -0{,}25z^{-1{,}5}$

44. $h''(z) = 36e^{6z}$

45. $h(z) = 3\ln(z) \quad \Longrightarrow \quad h'(z) = \frac{3}{z} \quad \Longrightarrow \quad h''(z) = -\frac{3}{z^2}$

46.

a. nouseva ja ylöspäin kaartuva (jyrkkenevästi nouseva)
b. nouseva mutta alaspäin kaartuva (loivenevasti nouseva)
c. laskeva ja alaspäin kaartuva (jyrkkenevästi laskeva)
d. laskeva mutta ylöspäin kaartuva (loivenevasti laskeva)
e. tasainen mutta ylöspäin kaartuva → minimikohta
f. tasainen mutta alaspäin kaartuva → maksimikohta

1.8 SOVELLUKSIA

47.

a. Nopeus on etäisyyden muutos per ajan muutos. Kysytty funktio on siten s:n derivaatta eli $v(t) = s'(t) = 10t$.

b. Kiihtyvyys on nopeuden muutos per ajan muutos. Kysytty funktio on siten v:n derivaatta, siis s:n toinen derivaatta eli $a(t) = v'(t) = 10$.

48.

a. Rajakustannus $= C'(q) = 2 + 0{,}2q$

b. Rajakustannus $= C'(q) = 3$

49. Tulosääntöä soveltaen:

Rajatulo $= R'(q) = p'(q) \cdot q + p(q) \cdot 1 = -\frac{1}{10}q + \left(5 - \frac{1}{10}q\right) = 5 - \frac{1}{5}q$

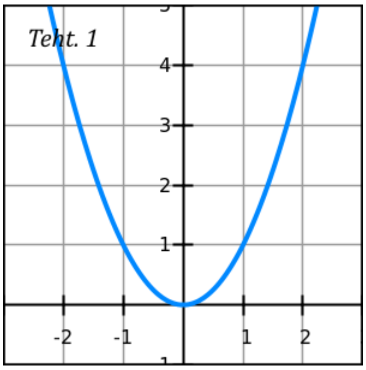
Tämä sama asia on selitetty myös *Taloustieteen oppikirjan* sivulla 82. Tosin siinä ei käytetä ketjusääntöä, vaan funktio tulkitaan 2. asteen polynomiksi.[1]

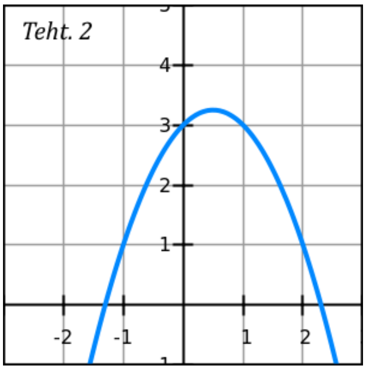
[1] Vuoden 2014 painos. Vanhemmissa painoksissa sivunumero on 81.

2 FUNKTION MINIMI- JA MAKSIMIKOHTIEN ETSIMINEN

2.1 POLYNOMIFUNKTIO

1. Funktio on ylöspäin aukeva paraabeli, jolla $x = 0$ on derivaatan nollakohta. Funktion toinen derivaatta on $f''(x) = 2$ eli kaikkialla positiivinen, joten kyseessä on minimikohta. Funktion arvo tässä kohdassa on $f(0) = 0$. Kun ajatellaan funktion muotoa, voidaan todeta, että kyseessä on globaali maksimi.





2. $f'(x) = -2x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

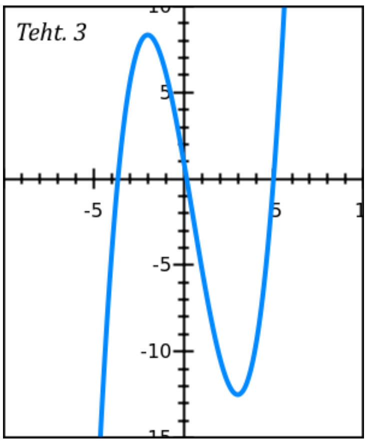
   $f''(x) = -2$

   Funktiolla on siis derivaatan nollakohta kohdassa $x = \frac{1}{2}$, ja se on maksimi, koska toinen derivaatta on negatiivinen. Kyseessä on myös globaali maksimi. Funktion arvo on tällöin $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{4}$

3. $f'(x) = x^2 - x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2 \text{ tai } x = 3$

   $f''(x) = 2x - 1 \quad \Longrightarrow \quad f''(x)$ on neg. kun $x < \frac{1}{2}$, ja pos. kun $x > \frac{1}{2}$

   Funktiolla on siten lokaali maksimi kohdassa $x = -2$ ja lokaali minimi kohdassa $x = 3$. Nämä ääriarvot ovat $f(-2) = 8\frac{1}{3}$ ja $f(3) = -12\frac{1}{2}$. Koska funktio on kolmannen asteen polynomi, sillä ei ole globaalia minimiä eikä globaalia maksimia.



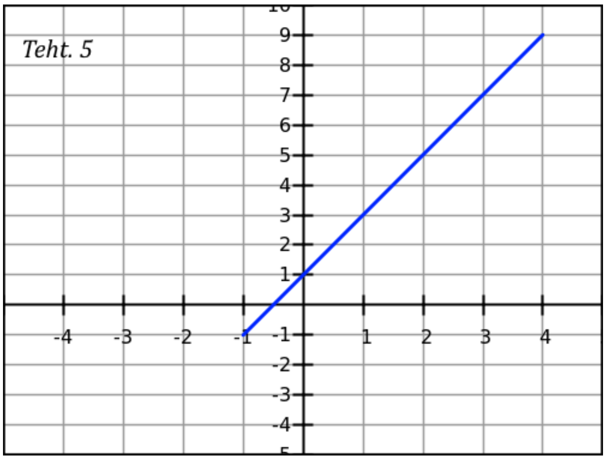
4. $g'(y) = 300y^2 - 200y - 100 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}$ tai $y = 1$

   $g''(x) = 600y - 200 \quad \Longrightarrow \quad g''$ on neg. kun $y < \frac{1}{3}$ ja pos. kun $y > \frac{1}{3}$.

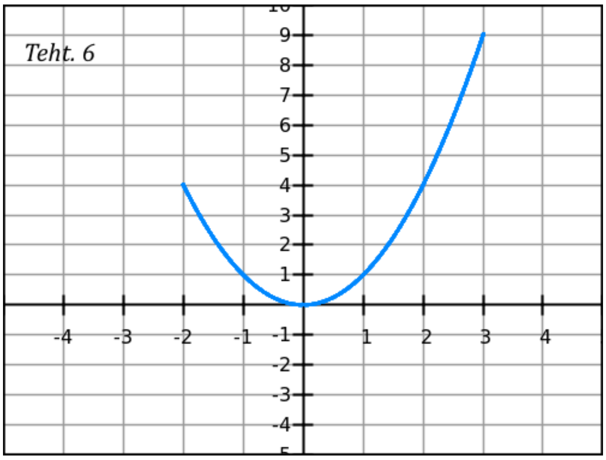
   Joten, funktiolla on lokaali maksimi kohdassa $y = -\frac{1}{3}$ ja lokaali minimi kohdassa $y = 1$. Funktion arvot ovat tällöin $g\left(-\frac{1}{3}\right) = 118{,}5185$ ja $g(1) = 0$. Kolmannen asteen polynomina g:llä ei ole globaaleja ääriarvokohtia.

2.2 RAJOITETTU POLYNOMIFUNKTIO

5. Tämä on nouseva suora, joten sillä ei olisi ääriarvoja, ellei se olisi rajoitettu välille $-1 \leq x \leq 4$. Kuten kuvasta nähdään, funktiolla on nyt globaali minimi kohdassa $x = -1$ ja globaali maksimi kohdassa $x = 4$. $f(-1) = -1$ ja $f(4) = 9$.



6. Tehtävän 1 funktiota siis rajoitetaan kuvassa näkyvällä tavalla. Funktiolla on edelleen globaali minimi kohdassa $x = 0$, mutta nyt reunapisteiden ansiosta sillä on lokaali maksimi kohdassa $x = -2$ ja globaali maksimi kohdassa $x = 3$. Funktion arvot ääriarvokohdissa ovat: $f(-2) = 4$, $f(0) = 0$ ja $f(3) = 9$.



7. Tehtävän 2 funktiota siis rajoitetaan. Funktiolla on edelleen globaali maksimi kohdassa $x = \frac{1}{2}$, mutta lisäksi sillä on globaali minimi kohdassa $x = -5$ ja globaali minimi kohdassa $x = 5$. Funktion arvot ääriarvokohdissa ovat: $f(-5) = -27$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{4}$ ja $f(5) = -17$.

8. Tämä on sama funktio kuin tehtävässä 3, mutta rajoitettuna. Lasketaan funktion arvot reunapisteissä: $f(-5) = -23\frac{1}{6}$ ja $f(5) = \frac{1}{6}$.

   Muut ääriarvokohdat olivat: $f(-2) = 8\frac{1}{3}$ ja $f(3) = -12\frac{1}{2}$.

   Siten $f(-5)$ on globaali minimi, $f(-2)$ on globaali maksimi, $f(3)$ on lokaali minimi ja $f(5)$ on lokaali maksimi.

9. Tämä on sama funktio kuin tehtävässä 4, mutta rajoitettuna. Tehtävän 4 lokaali maksimikohta $y = -\frac{1}{3}$ on nyt suljettu pois. Reunapisteessä $g(0) = 100$ ja derivaatta on negatiivinen (koska $y = 0 < \frac{1}{3}$), ja kyseessä on vasemmanpuoleinen reuna, josta funktion kuvaaja lähtee laskemaan oikealle. Siten reunapiste on lokaali maksimi. Globaalia maksimia ei ole, koska funktio jatkuu oikealle äärettömyyteen ja kyseessä on nouseva kolmannen asteen polynomi.

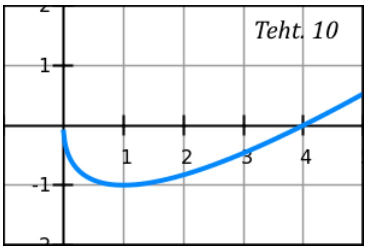
2.3 MUUT JATKUVAT FUNKTIOT

10. Ensimmäiseksi voidaan todeta, että funktio on määritelty kaikille $x \geq 0$, mutta ei negatiivisille x, joten sillä on reunapiste kohdassa $x = 0$.

    Derivaatta on $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, jolla on nollakohta $x = 1$.

    Toinen derivaatta on $f''(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$, joka on positiivinen kaikille $x > 0$.

    Näin ollen funktiolla on globaali minimi kohdassa $x = 1$ ja lokaali maksimi kohdassa $x = 0$. Funktion arvot näissä ääriarvokohdissa ovat: $f(0) = 0$ ja $f(1) = -1$.

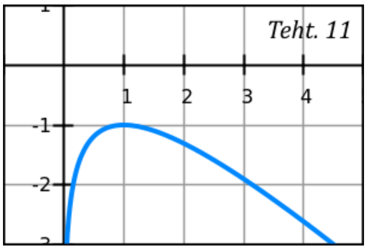


11. Tämä funktio on määritelty vain, kun $x > 0$. Sillä ei siis ole vasenta reunapistettä (eikä tietenkään myöskään oikeanpuoleista reunapistettä).

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ kaikille $x > 0$

Näin ollen $f(x)$:llä on globaali maksimi kohdassa $x = 1$ eikä muita ääriarvokohtia. Maksimissa funktion arvo on $f(1) = \ln(1) - 1 = -1$.



12. Tämä funktio on määritelty kaikille $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = e^x - e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -x \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$f''(x) = e^x + e^{-x} > 0$ kaikille x

Näin ollen funktiolla on globaali minimi kohdassa $x = 0$, ja $f(0) = 2$.

13. Tämä funktio on määritelty, kun logaritmoitavat ovat positiivisia, eli kun $x > 0$ ja $5 - \frac{1}{2}x > 0$, eli välillä $0 < x < 10$.

Kirjoitetaan funktio muotoon $f(x) = \ln\left(5x - \frac{1}{2}x^2\right)$. Logaritmifunktio on kasvava, ts. se on sitä suurempi, mitä suurempi luku on sulkeiden sisällä. Näin ollen, kun löydämme sisäfunktion maksimikohdan, on se myös koko funktion maksimikohta.

Sisäfunktio $g(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2$ on helppo maksimoida: maksimi on kohdassa $x = 5$, ja tällöin $g(x) = 12{,}5$. Tämä kohta on myös $f(x)$:n maksimikohta, ja $f(5) = \ln(12{,}5) \approx 2{,}53$.

Toinen ratkaisutapa on derivoida funktio $f(x) = \ln\left(5x - \frac{1}{2}x^2\right)$ ketjusäännön avulla ja etsiä sen nollakohta välillä $0 \leq x \leq 10$:

$f'(x) = \frac{1}{5x - \frac{1}{2}x^2} \cdot (5 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

(Edellisen yhtälön ratkaisu perustuu huomioon, että osamäärä on nolla kun osoittaja on nolla, eikä nimittäjällä ole nollakohtaa välillä $0 \leq x \leq 10$.)

Funktion toisen derivaatan voidaan todeta olevan negatiivinen, kun $0 \leq x \leq 10$, mutta tämä on sen verran työlästä, että jätämme sen tässä esittämättä.

3 YRITYKSEN VOITONMAKSIMOINTI

3.1 METODI 1: MUODOSTA VOITTOFUNKTIO JA ETSI SEN MAKSIMI

1.

   a. Voittofunktio on alaspäin aukeava paraabeli, joten riittää, kun etsitään derivaatan nollakohta:

      $\Pi'(q) = -\frac{2}{3}q + 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = 9$

   b. $\Pi(9) = -\frac{1}{3} \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 - 20 = -27 + 54 - 20 = 7$

      Vastaus: yrityksen optimimäärällä tuottama voitto on 7.

2.

   a. Nyt $\Pi'(q) = -\frac{1}{5}q - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = -5$

      Negatiivinen tuotantomäärä ei kuitenkaan ole mahdollinen. Pienin mahdollinen tuotantomäärä on $q = 0$. Tässä kohtaa on siis voittofunktion vasen reunapiste, ja derivaatta on tällöin negatiivinen: $\Pi'(0) = -1$. Tämä on siis lokaali maksimi, ja samalla globaali maksimi, kuten voimme todeta ajattelemalla funktion kuvaajan muotoa, joka on alaspäin aukeava paraabeli.

   b. Korkein yrityksen saatavissa oleva voitto on $\Pi(0) = -3$. [2]

3.

   a. $R(q) = pq = 5q$

   b. $\Pi(q) = R(q) - C(q) = 5q - \left(10 + 2q + \frac{1}{10}q^2\right) = -\frac{1}{10}q^2 + 3q - 10$

   c. Maksimoidaan voittofunktio:

      $\Pi'(q) = -\frac{1}{5}q + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = 15$

   d. $\Pi(15) = -\frac{1}{10} \cdot 15^2 + 3 \cdot 15 - 10 = 12\frac{1}{2}$

[2] Kuten *Taloustieteen oppikirjan* sivulla 78 (vanhemmissa painoksissa sivu 77) sanotaan, lyhyellä aikavälillä yrityksen kannattaa jatkaa toimintaansa, kunhan tuotteesta saatavat myyntitulot riittävät kattamaan muuttuvat kustannukset. Tässä tehtävässä kyse on tilanteesta, joissa tämä ehto ei täyty, ja siten yrityksen kannattaa lopettaa tuotanto heti (eli valita määrä $q = 0$).

4.

a. $R(q) = pq = 4q$

b. $\Pi(q) = R(q) - C(q) = 4q - \left(100 + 2q + \frac{1}{100}q^2\right) = -\frac{1}{100}q^2 + 2q - 100$

c. Maksimoidaan voittofunktio:

$\Pi'(q) = -\frac{1}{50}q + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 100$

d. $\Pi(100) = -\frac{1}{100} \cdot 100^2 + 2 \cdot 100 - 100 = 0$

Yritys ei siis tuota voittoa, muttei tappiotakaan.

5.

a. $R(q) = pq = \left(12 - \frac{1}{2}q\right)q = 12q - \frac{1}{2}q^2$

b. $\Pi(q) = R(q) - C(q) = -\frac{1}{27}q^3 - \frac{3}{4}q^2 + 9q - 12$

c. Maksimoidaan voittofunktio:

$\Pi'(q) = -\frac{1}{9}q^2 - \frac{3}{2}q + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{9}{2}$

d. $\Pi\left(\frac{9}{2}\right) = 9\frac{15}{16}$

6. Tässä tehtävässä kannattaa aluksi muodostaa tulofunktio. Sen tekemiseksi taas on ratkaistava, miten p riippuu määrästä q_d. Ja vastaus on: $p = 10 - \frac{1}{4}q_d$. Voimme myös olettaa, että koko tuotanto q myydään, eli $q_d = q$, jolloin $p = 10 - \frac{1}{4}q$. Tulofunktio puolestaan on $R(q) = pq = \left(10 - \frac{1}{4}q\right)q$.

a. $\Pi(q) = R(q) - C(q) = -\frac{1}{24}q^3 - \frac{1}{2}q^2 + 6q - 9$

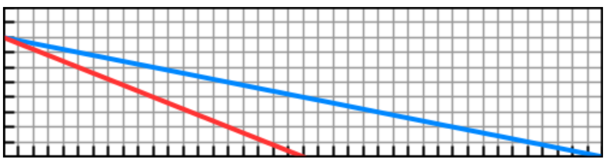
$\Pi'(q) = -\frac{1}{8}q^2 - q + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 4$

b. $\Pi(4) = 4\frac{1}{3}$

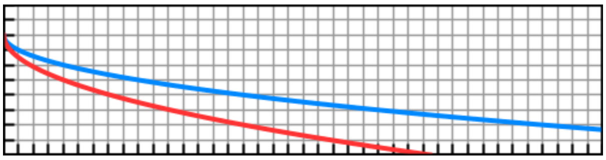
3.2 METODI 2: RAJATULO = RAJAKUSTANNUS

Allaolevissa kuvissa punainen on yrityksen kohtaama kysyntäkäyrä, sininen on rajatulokäyrä, ja vihreä on rajakustannuskäyrä.

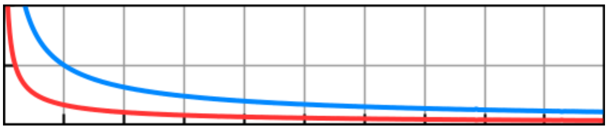
7. $R(q) = pq = \left(8 - \frac{1}{5}q\right)q = 8q - \frac{1}{5}q^2$, joten rajatulo $= R'(q) = 8 - \frac{2}{5}q$.



8. $R(q) = pq = \left(8 - \sqrt{q}\right)q = 8q - q^{3/2}$, joten rajatulo $= R'(q) = 8 - \frac{3}{2}\sqrt{q}$.



9. $R(q) = pq = q^{-2/3} \cdot q = q^{1/3}$, joten rajatulo $= R'(q) = \frac{1}{3}q^{-2/3}$.



10. $R(q) = pq = 10q$, joten rajatulo $= R'(q) = 10$.

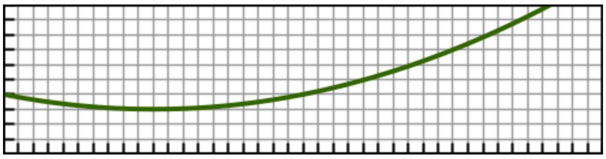
    Tässä on kyse täydellisen kilpailun tapauksesta: kun hinta on vakio (10), niin rajatulo = hinta, aivan kuten pääsykoekirjat kertovat.

11. Rajakustannus $= C'(q) = 0{,}75$. Tässä rajakustannus on siis vakio. Kokonaiskustannusten kuvaaja on nouseva suora: aina, kun tuotantoa q lisätään yhdellä, kustannukset nousevat saman verran eli 0,75:llä.

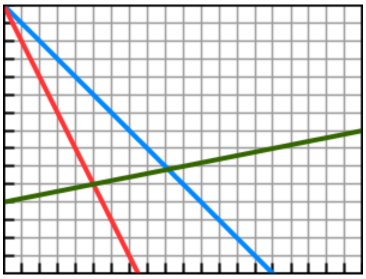
12. Rajakustannus $= C'(q) = 0{,}05q + 0{,}91$.

13. Rajakustannus $= C'(q) = \frac{1}{100}q^2 - \frac{1}{5}q + 4$.

    Tässä rajakustannuskäyrässä ”erikoisuus” on siinä, että käyrä on aluksi laskeva. Se kääntyy nousuun vasta hieman suuremmilla tuotantomäärillä, kun $q > 10$.



14.
   a. $R(q) = pq = (15 - q)q = 15q - q^2 \quad \Rightarrow \quad MR = R'(q) = 15 - 2q$
   b. $MC = C'(q) = \frac{1}{5}q + 4$
   c. $MR = MC \quad \Rightarrow \quad 15 - 2q = \frac{1}{5}q + 4 \quad \Rightarrow \quad q = 5$



   d. $\Pi(5) = R(5) - C(5) = (15 \cdot 5 - 5^2) - \left(\frac{1}{10} \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 10\right) = 17\frac{1}{2}$
   e. $p = 15 - 5 = 10$

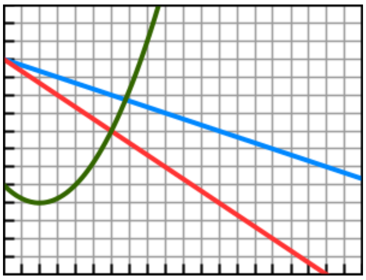
15.

a. $R(q) = pq = \left(12 - \frac{1}{3}q\right)q = 12q - \frac{1}{3}q^2 \quad \Longrightarrow \quad MR = R'(q) = 12 - \frac{2}{3}q$

b. $MC = C'(q) = \frac{1}{4}q^2 - q + 5$

c. $MR = MC \quad \Longrightarrow \quad 12 - \frac{2}{3}q = \frac{1}{4}q^2 - q + 5 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{3}q - 7 = 0$

$\Longrightarrow \quad q = 6$ (negatiivinen juuri ei käy)



d. $\Pi(6) = R(6) - C(6) = \left(12 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot 6^2\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot 6^3 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 16\right)$

$= 14$

e. $p = 12 - \frac{1}{3} \cdot 6 = 10$

3.3 KUSTANNUSFUNKTION JOHTAMINEN TUOTANTOFUNKTIOSTA

16. Ratkaisemalla L:n tuotantofunktiosta saamme tuloksen $L = q^2$. Koska työ on ainoa tuotannontekijä, yrityksen kustannukset ovat $C = wL = 5L = 5q^2$. Tämä on kysytty kustannusfunktio, koska se kertoo yrityksen kustannukset tuotetun määrän funktiona. Siis $C(q) = 5q^2$.

17. Rajakustannus $= C'(q) = 10q$. Täydellisessä kilpailussa oleva yritys maksimoi voittonsa, kun $MC = p$ eli tässä tapauksessa $10q = 180 \quad \Longrightarrow \quad q = 18$. Voiton määrä on tällöin $\Pi = pq - C = 180 \cdot 10 - 5 \cdot 10^2 = 1300$.

18. Yrityksen kustannukset ovat $C = wL + rK + sM$. Kehitetään tämä kustannusfunktioksi: $C(q) = wL(q) + rK + sM(q)$, missä funktiot $L(q)$ ja $M(q)$ kertovat, miten työn ja välituotteiden määrä riippuu tuotoksesta.

    Välituotteiden osalta asia on jo selvä: $M(q) = 0{,}5q$.

    Työn määrä voidaan ratkaista tuotantofunktiosta: $q = L^{0,5}K^{0,25}$

    $\Longrightarrow \quad L = (qK^{-0,25})^2 = \frac{q^2}{\sqrt{K}}$

    Joten $C(q) = w\frac{q^2}{\sqrt{K}} + rK + \frac{sq}{2} = 5 \cdot \frac{q^2}{\sqrt{16}} + 2 \cdot 16 + \frac{3 \cdot q}{2}$

    $\Longrightarrow \quad C(q) = \frac{5}{4}q^2 + \frac{3}{2}q + 32$

19. Tuotantofunktio: $q = F(L) = \sqrt{L}$, joten $MPL = F'(L) = \frac{1}{2\sqrt{L}}$

20.

a. $q = 18 = \sqrt{L} \quad \Longrightarrow \quad L = 18^2 = 324$

b. Työn rajatuottavuuden arvo $= F'(18) \cdot p = \frac{1}{2\sqrt{324}} \cdot 180 = 5$

Palkka$= w = 5$

$\Longrightarrow$ yhtälö pätee.

21. Jotta yrityksen voitto maksimoituisi, täytyy päteä kaksi ehtoa:

$MPL \cdot p = w$ ja $MPK \cdot p = r$, missä MPL on työn rajatuottavuus ja MPK on pääoman rajatuottavuus. Ratkaistaan siis nämä rajatuottavuudet tuotantofunktiosta:

$MPL = \frac{d}{dL}F(L,K) = \frac{1}{2L}$

$MPK = \frac{d}{dK}F(L,K) = \frac{1}{2K}$

joten voitonmaksimoinnin ehdot ovat

$\frac{1}{2L} \cdot p = w \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{p}{2w} = \frac{12}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2K} \cdot p = r \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{p}{2r} = \frac{12}{2 \cdot 3} = 2$

Vastaus: $L = \frac{3}{2}$ ja $K = 2$.

22. Voitto $= R - C = pq - (wL + rK) = pF(L,K) - (wL + rK)$

$$= 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(2)\right) - \left(4 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 2\right) \approx -5{,}4$$

eli yritys tekee tappiota.

Tämä on melko kummallinen tulos. Yrityksellä ei ole kiinteitä kustannuksia, joten sen luulisi pääsevän nollatulokseen asettamalla panosten määrät nolliksi. Tällöin sillä ei olisi tuloja, muttei myöskään kustannuksia, joten se ei tekisi tappiota. Miksi siis optimissakin tulee tappiota?

Outo tilanne selittyy sillä, että tehtävän tuotantofunktio on aika outo. Hyvin pienillä panosmäärillä logaritmit menevät negatiivisiksi, ja

$\lim_{L \to 0}(F(L,K)) = \lim_{K \to 0}(F(L,K)) = -\infty.$

Oudosta tuotantofunktiosta seuraa outoja tuloksia.

23. Kuten tehtävässä 21, voitonmaksimoinnin ehdot ovat:

$$w = MPL \cdot p = \frac{d}{dL} F(L, K) \cdot p = \frac{p}{2\sqrt{L}} \quad \Longrightarrow \quad L = \left(\frac{p}{2w}\right)^2 = \left(\frac{12}{2 \cdot 4}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$r = MPK \cdot p = \frac{d}{dK} F(L, K) \cdot p = \frac{p}{\sqrt{K}} \quad \Longrightarrow \quad K = \left(\frac{p}{r}\right)^2 = \left(\frac{12}{3}\right)^2 = 16$$

jolloin $q = F(L, K) = \sqrt{\frac{9}{4}} + 2 \cdot \sqrt{16} = 9\frac{1}{2}$

ja voitto $= pq - wL - rK = 12 \cdot 9\frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{9}{4} - 3 \cdot 16 = 57$

Vastaus: optimissa $L = \frac{9}{4}$, $K = 16$ ja $\Pi = 57$.

24. Kuten tehtävässä 21, voitonmaksimoinnin ehdot ovat:

$$w = MPL \cdot p = \frac{d}{dL} F(L, K) \cdot p = \frac{1}{3} p \left(\frac{K}{L^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{K}{L^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3w}{p} = \frac{3 \cdot 4}{12} = 1 \quad \Longrightarrow \quad K = L^2 \qquad \text{(1. tulos)}$$

$$r = MPK \cdot p = \frac{d}{dK} F(L, K) \cdot p = \frac{1}{3} p \left(\frac{L}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{L}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3r}{p} = \frac{3 \cdot 3}{12} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{27}{64} K^2 \qquad \text{(2. tulos)}$$

Sijoittamalla 1. tuloksen 2. tulokseen saamme:

$$L = \frac{27}{64} (L^2)^2 = \frac{27}{64} L^4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{64}{27} = L^3 \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{4}{3}$$

ja sijoittamalla tämän jälleen 1. tulokseen, $K = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Nämä ovat siis optimaaliset panosmäärät: $L = \frac{4}{3}$ ja $K = \frac{16}{9}$.

Näillä panosmäärillä tuotos on $q = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$

ja siten $\Pi = R - C = pq - wL - rK = 12 \cdot \frac{4}{3} - 4 \cdot \frac{4}{3} - 3 \cdot \frac{16}{9} = 5\frac{1}{3}$

Vastaus: optimissa $L = \frac{4}{3}$, $K = \frac{16}{9}$ ja $\Pi = 5\frac{1}{3}$.

4 KULUTTAJAN HYÖDYNMAKSIMOINTI

4.1 BUDJETTIRAJOITE

1. $4x + 5y \leq 60$
2. $x_A p_A + x_B p_B \leq M$
3. $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \leq M$
4. Tällaisessa tehtävässä kannattaa ehkä aluksi miettiä vähän budjettirajoitteen ääripäitä. Jos Veronika ei työskentelisi, hänellä olisi 80 tuntia vapaa-aikaa eli $F = 80$. Jos hän taas käyttäisi kaikki 80 tuntiaan työntekoon, hän voisi kuluttaa 800 eurolla, eli $C = 800$.

   Voimme siis mieltää palkan *vapaa-ajan hinnaksi* ja ajatella, että Veronikalla on käytössään 800 euroa, jolla hän voi ostaa vapaa-aikaa ja muita asioita. Vapaa-ajan hinta on 10 euroa/tunti.

   Siten budjettirajoite on $C + 10F = 800$.

   Sama tulos olisi saatu myös toteamalla, että $C = wL = 10(80 - F)$, missä työ L on se osa ajasta, joka jää jäljelle, kun vapaa-aika L on vähennetty.

4.2 RAJAHYÖTYFUNKTION JOHTAMINEN

5. Leivän rajahyöty $= \frac{d}{dx} U(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$
6. Leivän rajahyöty $= \frac{d}{dx} U(x, y) = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$
7. Leivän rajahyöty $= \frac{d}{dx} U(x, y) = \frac{1}{x}$

4.3 HYÖTYFUNKTION MAKSIMOIMINEN

8. Ratkaistaan tämä kuten tehtävämonisteen esimerkissä. Koska enempi on parempi, Olli käyttää koko budjettinsa, eli $4x + 5y = 60$ ja siten $y = 12 - 0{,}8x$. Siten voidaan muodostaa rajoitettu hyötyfunktio $Y(x)$, joka riippuu vain x:stä:

   $Y(x) = U\big(x, (12 - 0{,}8x)\big) = \sqrt{12x - 0{,}8x^2}$

   $Y'(x) = \frac{12 - 1{,}6x}{2\sqrt{12x - 0{,}8x^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7{,}5$

   Toisen derivaatan negatiivisuus voitaisiin tarkistaa käyttäen osamäärän derivointisääntöä tai ketjusääntöä, mutta vähemmällä vaivalla päästään, kun huomataan, että budjettisuoran päätepisteissä ($x = 0$ tai $x = 15$) hyötyfunktio saa arvon nolla, mutta niiden välillä se on positiivinen.

   Vastaus: Ollin leivänkulutus on $x = 7{,}5$ ja maidonkulutus $y = 12 - 0{,}8 \cdot 7{,}5 = 6$.

9. Käyttäen edelleen samaa ratkaisutapaa, muodostetaan taas rajoitettu hyötyfunktio $Y(x) = U\big(x, (12 - 0{,}8x)\big) = (12x - 0{,}8x^2)^{1/3}$

   joka kertoo, miten hyöty käyttäytyy, kun liikutaan budjettisuoraa pitkin.

   Budjettisuoran päätepisteissä ($x = 0$ tai $x = 15$) hyöty on nolla, niiden välillä se on positiivinen. Riittää siis löytää derivaatan nollakohta. Oikeastaan on selvää, että hyödyn maksimoiva piste on sama kuin edellisessäkin tehtävässä, sillä ulkofunktio maksimoituu kun sisäfunktio $12x - 0{,}8x^2$ maksimoituu, mutta derivoidaan silti:

   $Y'(x) = \frac{1}{3}(12x - 0{,}8x^2)^{-2/3}(12 - 1{,}6x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 7{,}5$

   Vastaus: Ollin leivänkulutus on $x = 7{,}5$ ja maidonkulutus $y = 12 - 0{,}8 \cdot 7{,}5 = 6$.

10. Korhosten budjettirajoite on $8x + y \leq 40$. Jos koko työaika käytetään, pätee että $8x + y = 40$, eli $y = 40 - 8x$.

    Kun oletetaan, että koko työaika käytetään—eli että kulutuspiste (x, y) valitaan budjettisuoralta—voidaan jälleen muodostaa rajoitettu hyötyfunktio

    $Y(x) = U(x, 40 - 8x) = \ln(40x^2 - 8x^3)$

    Funktio on jatkuva ja se on määritelty, kun $40x^2 - 8x^3 > 0$. Ulkofunktio $\ln(\cdot)$ on aidosti kasvava, joten se saa suurimman arvonsa pisteessä, jossa sisäfunktio saa suurimman arvonsa. Merkitään siis sisäfunktiota f:llä, $f(x) = 40x^2 - 8x^3$, ja etsitään sen maksimikohta:

    $f'(x) = 80x - 24x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ tai } x = \frac{10}{3}$

    $f''(x) = 80 - 48x \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{10}{3}\right) = 80 - 160 = -80 < 0$

    Löydettiin siis sisäfunktion maksimikohta $x = \frac{10}{3}$, ja tämä on myös koko hyötyfunktion maksimi, koska ulkofunktio on aidosti kasvava.

    Korhoset siis valitsevat pisteen, jossa leivänkulutus on $x = \frac{10}{3}$ ja siten maidonkulutus on $y = 40 - 8 \cdot \frac{10}{3} = \frac{40}{3}$.

11. Nyt Korhosten kannattaa valita se *tuotantoyhdistelmä*, josta he saavat eniten rahaa markkinoilla, ja valita sitten se *kulutusyhdistelmä*, joka antaa tällä rahamäärällä korkeimman hyötytason.

    Korhosten tuotannostaan saamat tulot ovat $M = 20x + 5y$. Heidän tuotantoaan rajoittaa yhtälö $8x + y \leq 40$, jossa kuitenkin $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. Jos he käyttävät kaiken käytettävissä olevan työajan (eli $8x + y = 40$), voimme kirjoittaa myös:

    $y = 40 - 8x \text{ ja } 0 \leq x \leq 5.$

    Siten tulot voidaan kirjoittaa muotoon $M = 20x + 5(40 - 8x) = 200 - 20x$, missä $0 \leq x \leq 5$. On helppo nähdä, että M on x:n suhteen laskeva suora, joka voidaan maksimoida valitsemalla $x = 0$. Tällöin $M = 200$.

    (Toinen tapa päätyä tähän on todeta, että leivänteko tuottaa 2,5 €/h ja maidontuotanto tuottaa 5 €/h, joten koko työaika kannattaa käyttää maidontuotantoon, jolloin $M = 40 \cdot 5 = 200$ €.)

Kun Korhoset keskittyvät tuottamaan vain maitoa, kulutuksen kannalta heidän budjettirajoitteensa on $20x + 5y \leq 200$. Koska enempi on parempi, he myös käyttävät 200 euroansa kokonaan, joten $20x + 5y = 200$, ja siten $y = 40 - 4x$. Tästä voidaan taas muodostaa rajoitettu hyötyfunktio:

$$Y(x) = U(x, 40 - 4x) = \ln(40x^2 - 4x^3)$$

Tämän maksimoimiseksi etsitään sisäfunktion $f(x) = 40x^2 - 4x^3$ maksimi:

$$f'(x) = 80x - 12x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ tai } x = \frac{20}{3}$$

$$f''(x) = 80 - 24x \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{20}{3}\right) = 80 - 160 = -80 < 0$$

Löydettiin siis sisäfunktion maksimikohta $x = \frac{20}{3}$, ja tämä on myös koko hyötyfunktion maksimikohta, koska ulkofunktio $\ln(\cdot)$ on aidosti kasvava.

Maidonkulutus on siten $y = 40 - 4 \cdot \frac{20}{3} = \frac{40}{3}$.

Summa summarum:

- Korhoset tuottavat $x = 0,\ y = 40$
- Korhoset kuluttavat $x = \frac{20}{3},\ y = \frac{40}{3}$

Kun verrataan edellisen tehtävän vastaukseen, huomataan, että maidonkulutus ei muuttunut, mutta leivänkulutus kaksinkertaistui. Vaihdanta teki tämän mahdolliseksi.

5 TODENNÄKÖISYYSLASKENTA JA TILASTOTIEDE

5.1 KESKIARVO, MOODI JA MEDIAANI

1.
   a. keskiarvo $= \frac{10+10+9+9+9+9+8+7+7+7+5}{11} = \frac{90}{11} \approx 8{,}18$
   b. moodi $= 9$ (eniten esiintyvä arvo)
   c. mediaani $= 9$ (suuruusjärjestykseen asetetuista arvoista keskimmäinen)

2. Suuren opetusryhmän koearvosanoissa oli seitsemän kymppiä, 19 ysiä, 30 kasia, 24 seiskaa, 11 kutosta, kahdeksan viitosta ja 42 nelosta. Mikä oli ryhmän koearvosanojen
   a. keskiarvo $= \frac{7\cdot 10+19\cdot 9+30\cdot 8+24\cdot 7+11\cdot 6+8\cdot 5+42\cdot 4}{7+19+30+24+11+8+42} = \frac{923}{141} \approx 6{,}55$
   b. moodi $= 4$
   c. mediaani $= 7$

   Mediaanin laskutapa kaipaa ehkä selitystä. Mediaani on keskimmäinen eli 71. arvo, sillä $\frac{141}{2} = 70\frac{1}{2}$. Laskettiin sitten huonoimmasta parhaaseen tai parhaasta huonoimpaan päin, kummassakin tapauksessa 71. arvo löytyy seiskojen ryhmästä.

3. Riippuu siitä, mitä ”keskimääräistä paremmalla kuskilla” tarkoitetaan. Jos kuskin etevyyttä mitataan jollakin numeerisella mittarilla, siitä voidaan laskea keskiarvo, ja tällöin on kyllä mahdollista, että 80 % kuskeista on keskiarvoa parempia. Jos esim. 20 % kuskeista saa ajotaidoistaan arvosanan yhdeksän, ja loput 80 % saavat arvosanan 10, niin tällöin keskiarvo on 9,8, ja tällöin 80 %:lla kuskeista on kuin onkin keskiarvoa parempi arvosana.

   Jos sen sijaan ”keskimääräisellä” tarkoitetaan mediaania, ei ole mahdollista, että 80 % olisi tätä parempia. Korkeintaan 50 % voi olla mediaania parempia. (Sen sijaan, jos keskenään *yhtä hyviä* kuskeja on tarpeeksi, on mahdollista, että jopa 80 % kuskeista on *yhtä hyviä tai parempia* kuin mediaani, mutta tätähän ei kysytty.)

5.2 PAINOTETTU KESKIARVO

4. Painotettu keskiarvo $= \frac{4\cdot 5+6\cdot 4+3\cdot 3+2\cdot 3+6\cdot 5}{4+6+3+2+6} = \frac{89}{21} \approx 4{,}24$

5. Tuottoprosentti $= 0{,}5 \cdot 13{,}2 + 0{,}25 \cdot 4{,}8 + 0{,}03 \cdot (-58{,}2) + 0{,}22 \cdot 0{,}1 = 6{,}076$

5.3 TODENNÄKÖISYYS

6. yksi

7. nolla

8.

a. $\text{tn} = p_A + p_B$

b. $\text{tn} = 0$

c. $\text{tn} = 1 - p_A$

d. $\text{tn} = 1 - p_A - p_B$

e. $\text{tn} = 1$

f. $\text{tn} = p_A$

9.

a. $\text{tn} = p_A + p_B - p_A p_B$

b. $\text{tn} = p_A p_B$

c. $\text{tn} = 1 - p_A$

d. $\text{tn} = 1 - p_A - p_B + p_A p_B$

e. $\text{tn} = 1 - p_A p_B$

f. $\text{tn} = p_A - p_A p_B$

10.

a. $\text{tn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b. Joko ensin kruuna ja sitten klaava, tai ensin klaava ja sitten kruuna:
$\text{tn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

c. $\text{tn} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

11.

a. $\text{tn} = \frac{1}{6}$

b. $\text{tn} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c. Vaihtoehdot: vain ekalla kutonen, vain tokalla kutonen, tai molemmilla kutonen.
$\text{tn} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$

d. Vaihtoehdot: ensin 5 ja sitten 6, tai ensin 6 ja sitten 5.
$\text{tn} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

e. Edellisen kohdan vaihtoehtoihin pitää nyt lisätä vielä kolmas: molemmilla kutonen (jolloin saadaan yhteensä 12).
$\text{tn} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

12. Ensimmäinen kortti on väkisinkin *jotain* maata, minkä jälkeen pakassa on jäljellä 51 korttia, joista 12 on samaa maata kuin ensimmäinen. Jos toinen kortti on samaa maata, on jäljelläolevista 50 kortista 11 samaa maata, jne. Joten:

$\text{tn} = 1 \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} = \frac{33}{16\,660} \approx 0{,}002$

13. Koska kaupungin väkiluvulla ei selvästikään ole merkitystä tehtävän ratkaisun kannalta, voimme yhtä hyvin olettaa asukkaita olevan 100. Tällöin republikaaneja on 60 ja demokraatteja 40, *Postilla* on 44 lukijaa ja *Tribunella* 56, ja *Tribunen* lukijoista 36 on demokraatteja.

    a. Koska *Tribunen* 56:sta lukijasta 36 on demokraatteja, loput 20 ovat republikaaneja. Niinpä 60:sta republikaanista 20 lukee *Tribunea*. Vastaus: $\text{tn} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

    b. *Postia* lukevat loput 40 republikaania ja loput 4 demokraattia. Siten $\text{tn} = \frac{40}{40+4} = \frac{10}{11}$

14.

    a. ”Saat kolme erilaista lelua” $\Leftrightarrow$ ”Toinen lelu on erilainen kuin ensimmäinen, ja kolmas on erilainen kuin kumpikaan edellisistä”

       joten $\text{tn} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$

    b. Tässä on kaksi mahdollisuutta. Joko 2. lelu on samanlainen kuin ensimmäinen, ja kolmas on erilainen, *tai* 2. lelu on erilainen kuin ensimmäinen, ja kolmas on samanlainen jommankumman kanssa.

       Joten $\text{tn} = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$

    c. ”Saat kolme samanlaista lelua” $\Leftrightarrow$ ”Toinen lelu on samanlainen kuin ensimmäinen, ja kolmaskin on samanlainen”

       joten $\text{tn} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

       (Kohdan c vastaus oltaisiin voitu laskea myös vähentämällä a- ja b-kohtien vastaukset luvusta 1. Nimittäin, kohtien a–c lisäksi ei ole mitään muita tapauksia: joko kaikki lelut ovat erilaisia, tai kaikki samanlaisia, tai on kaksi samaa ja yksi eri. Nämä tapaukset ovat myös toisensa poissulkevia. Niinpä niiden todennäköisyyksien summan täytyy olla yksi.)

15. Jos A ja B ovat tapahtumia, niin
    - A:n todennäköisyyttä merkitään $P(A)$, ja B:n todennäköisyyttä merkitään $P(B)$
    - A:n ehdollista todennäköisyyttä ehdolla B merkitään $P(A|B)$, ja se tarkoittaa suurin piirtein ”A:n todennäköisyyttä *kun tiedetään B:n tapahtuneen*.”

    Tässä tapauksessa A on sairaalaan joutuminen ja B on sairastuminen.

    Aina pätee: $P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\text{ei-}B) \cdot P(A|\text{ei-}B)$

    Tässä tapauksessa täytyy laskea $P(A|B)$, joten ratkaistaan se yhtälöstä:

    $$P(A|B) = \frac{1}{P(B)}\big(P(A) - P(\text{ei-}B) \cdot P(A|\text{ei-}B)\big)$$

    $$= \frac{1}{0{,}1}(0{,}02 - (1 - 0{,}1) \cdot 0{,}005) = 0{,}155 = 15{,}5\ \%$$

    Vastaus: 15,5 prosenttia.

5.4 ODOTUSARVO

Jos X on satunnaisluku, sen odotusarvoa merkitään $E(X)$.

16. Olkoon X nopanheiton silmäluku. Tällöin

    $E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3\frac{1}{2}$

17. Olkoot X_1 ja X_2 ensimmäisen ja toisen nopanheiton silmäluvut. Tällöin

    $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 7$

18. Tämä saattaa kuulostaa monimutkaiselta tehtävältä, jossa täytyy miettiä, miten todennäköisyydet muuttuvat, jos ensimmäinen luku on 1, jos se on 2, jne. Mutta eipä olekaan asia näin. Se, että paperilappujen luvut eivät ole toisistaan riippumattomia, ei vaikuta keskiarvoon. Sääntö $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ pätee yhä.

    Joten, jos merkitään 1. ja 2. nostolla saatua lukua X_1 ja X_2, niin

    $E(X_1) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 2$ ja samoin $E(X_2) = 2$

    $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 2 + 2 = 4$

    Vastaus: 4

19. Kuten edellinen tehtävä. Nyt $E(X_i) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3\frac{1}{2}$

    ja $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \cdot 3\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$

    Vastaus: $10\frac{1}{2}$

20. $E(X) = 0{,}01 \cdot 500 + 0{,}09 \cdot 20 + 0{,}9 \cdot 0 = 6{,}8$ €

21. $E(Z) = E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c = a\mu_X + b\mu_Y + c$

5.5 OTANNAN JA MITTAAMISEN PERUSKÄSITTEITÄ

22.
    a. Perusjoukkoon kuuluvat kaikki suomalaiset äänioikeutetut.
    b. Otokseen kuuluvat ne 2000 ihmistä, joita haastateltiin.
    c. Tilastoyksiköitä ovat haastatellut henkilöt.
    d. Muuttujia ovat henkilön puoluekanta, ikä, tulotaso jne.
    e. Satunnaisotanta.

23.
    a. Otos on edustava, jos muuttujien jakauma otoksessa vastaa niiden jakaumaa perusjoukossa.
    b. Voidaan esim. verrata sukupuolijakaumaa, ikäjakaumaa ja tulojakaumaa Tilastokeskuksesta saataviin, koko väestöä kuvaaviin jakaumiin ja tarkistaa, vastaako otos perusjoukkoa näiden ominaisuuksien osalta. Voidaan myös pohtia, onko otoksen maantieteellinen jakauma edustava: jos kaikki haastattelut on tehty Helsingissä, otos voi edustaa hyvin Helsingin väestöä, mutta huonosti koko Suomen väestöä.

c. Voidaan esim. päätellä, että puoluiden kannatusosuudet perusjoukossa ovat lähellä sitä, mitä ne ovat otoksessa, tai että ikä ja tulotaso vaikuttavat puoluekantaan perusjoukossa samalla tavoin kuin otoksessa.
d. Satunnaishajonta tarkoittaa, ettei otos ole käytännössä koskaan *täysin* edustava, vaan on osittain sattuman vääristämä. Otokseen saattaa esim. tulla sattumalta mukaan enemmän demareita kuin mikä on demarien osuus perusjoukossa—tai vähemmän. Todennäköisyyslaskennalla voidaan arvioida mittausvirheen todennäköistä *kokoa* (eli tutkimuksen *virhemarginaalia*) mutta ei virheen *suuntaa* eli sitä, olivatko demarit yli- vai aliedustettuina.

24. Kvalitatiivisen eli laadullisen muuttujan arvot ovat ei-numeerisia, kuten vaikkapa nimi, kotipaikka ja puoluekanta. Kvantitatiivisen eli määrällisen muuttujan arvoja on luontevaa ilmaista numeerisesti, kuten vaikkapa ikä ja tulotaso.

25. Kun mittaustulos ei riipu mittaajasta.

26.

1) Nominaaliasteikko (luokittelu- tai laatueroasteikko). Esim. sukupuoli, kotipaikkakunta, puoluekanta. Tällaisen muuttujan arvojen perusteella havainnot voidaan luokitella ryhmiin, mutta ryhmien välillä ei ole luontaista *järjestystä*.

2) Ordinaali- eli järjestysasteikko. Esim. asteikko ”5= täysin samaa mieltä, 1= täysin eri mieltä” on ordinaaliasteikko. Havainnot voidaan järjestää muuttujan arvojen perusteella ryhmiin, joilla on luontainen järjestys.

3) Intervalli- eli välimatka-asteikko. Esim. Celsiusasteikko on tällainen. Muuttujan arvojen suuruusjärjestyksen lisäksi myös niiden välisten erojen suuruudella on merkitys: yhden ja kahden Celsius-asteen välinen ero on yhtä suuri kuin kahden ja kolmen asteen välinen, mutta pienempi kuin 11 ja 15 asteen välinen. Asteikon nollapiste on kuitenkin sopimuksenvarainen.

4) Suhdelukuasteikko. Esim. henkilön tulot tai yrityksen liikevaihto. Tällä asteikolla on luonnollinen nollapiste, ja muuttujan kaikki arvot ovat samanmerkkisiä (yleensä positiivisia).

Asteikkojen järjestyksen perusteena on se, että kullakin asteikolla on edellisen asteikon ominaisuudet ja lisäksi jotakin muita ominaisuuksia.

27. Jatkoa edelliseen tehtävään. Millä mitta-asteikolla kutakin seuraavista muuttujista mitataan?
a. lämpötila Celsius-asteina: intervalliasteikko
b. bruttokansantuote euroina: suhdelukuasteikko
c. henkilön sukupuoli: nominaaliasteikko
d. henkilön puoluekanta: nominaaliasteikko
e. puolueen kannatus: suhdelukuasteikko
f. runon sijoitus runokilpailussa: ordinaaliasteikko
g. planeetan koko: suhdelukuasteikko.

5.6 VARIANSSI JA KESKIHAJONTA

28. Varianssi $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - 8)^2$

$$= \frac{1}{6}[(-5)^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2 + 11^2 + (-4)^2] = 30\tfrac{1}{3}$$

29. Keskihajonta $= \sqrt{\text{varianssi}} = \sqrt{30\tfrac{1}{3}} \approx 5{,}51$

30. Kun arvioidaan perusjoukon varianssia otoksen perusteella, varianssin laskukaava on $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, missä n on otoskoko.

    Tällä kaavalla laskien varianssin estimaatiksi saadaan 36,4 ja keskihajonnaksi tämän neliöjuuri eli 6,03.

31. Varianssi $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(x_i - 3\tfrac{1}{2}\right)^2$

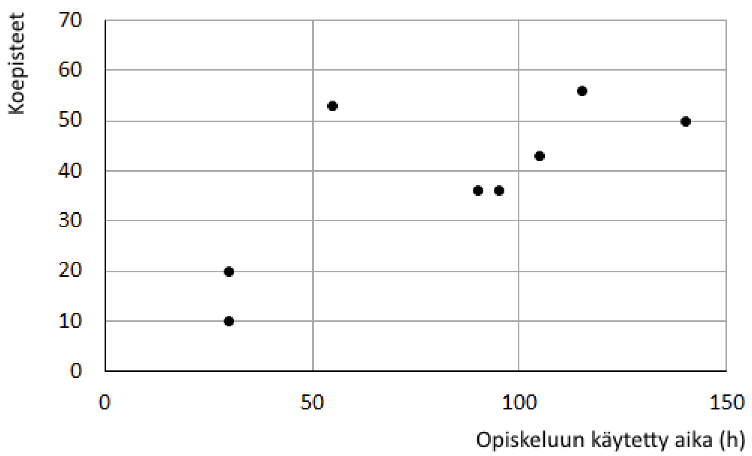
$$= \frac{1}{6}\left[\left(-2\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-1\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(1\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(2\tfrac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{70}{24} \approx 2{,}92$$

    Keskihajonta $= \sqrt{\frac{70}{24}} \approx 1{,}71$

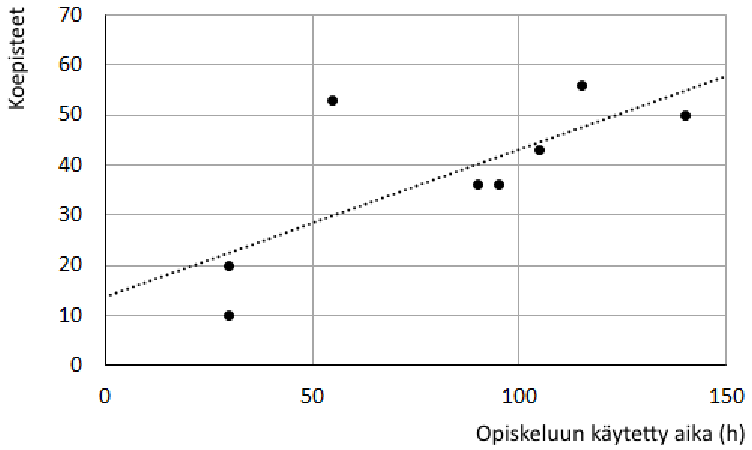
5.7 HAJONTAKUVIO JA REGRESSIOSUORA

32. Opiskelija voi vaikuttaa koepisteisiinsä käyttämällä aikaa opiskeluun, ei päinvastoin. Syy-seuraussuhteen suunnan ollessa tämä, on luontevinta ajatella, että opiskeluun käytetty aika on selittävä muuttuja ja koepisteet on riippuva muuttuja.

    Yleensä selittävä muuttuja merkitään vaaka-akselille ja riippuva muuttuja pystyakselille, kuten tässä alla on tehty.



33. Allaolevan kuvan regressiosuora on sovitettu tietokoneella. Mitä lähempänä silmämääräisesti sovitettu regressiosuorasi on tätä suoraa, sitä parempi. Joka tapauksessa regressiosuoran pitäisi olla nouseva ja kulkea pisteparven läpi suurin piirtein parven suuntaisesti.



34. Karkeasti sanoen, regressiosuora pyrkii kuvaamaan, miten riippuva muuttuja y riippuisi selittävästä muuttujasta x, jos kaikki muut y:hyn vaikuttavat tekijät olisi vakioitu, ts. jos satunnaisvaihtelua ei olisi.

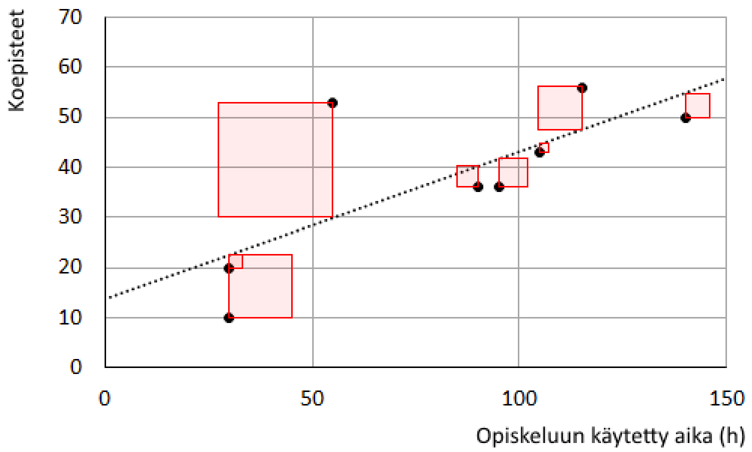
    Toisin (ja yhtä karkeasti) sanoen, regressiosuora pyrkii kuvaamaan, miten y *keskimäärin* riippuu x:stä.

35. Regressiosuora on se suora, joka minimoi *neliösumman*.

    Neliösumma lasketaan siten, että kunkin havaintopisteen pystysuuntainen etäisyys suorasta nostetaan toiseen potenssiin, ja näin saatujen lukujen summa on neliösumma.

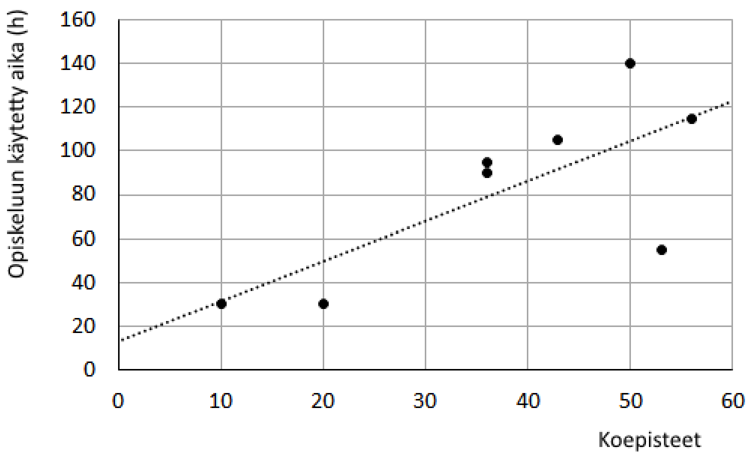
    Siis neliösumma = $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f(x_i)\right)^2$, missä $y = f(x)$ on regressiosuoran yhtälö.

    Graafisesti neliösumma voidaan esittää allaolevaan kuvaan piirrettyjen neliöiden yhteenlaskettuna pinta-alana. Regressiosuora asetetaan siten, että neliöiden yhteispinta-ala minimoituu.



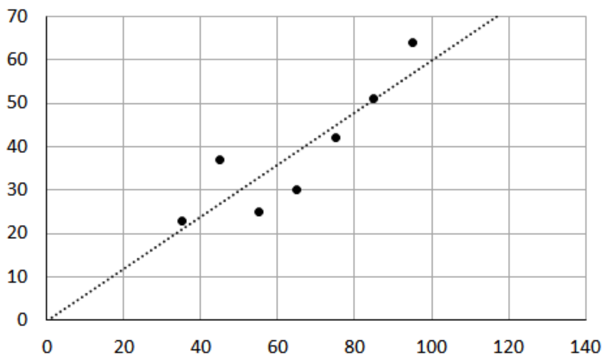
36. Jos selittävän ja riippuvan muuttujan roolit vaihdettaisiin keskenään (eli tutkittaisiin, miten opiskeluun käytetty aika riippuu koepisteistä), laitettaisiin koepisteet vaaka-akselille ja opiskelutunnit pystyakselille. Hajontakuvion pisteet muodostavat edellisen hajontakuvion ”peilikuvan”.

Regressiosuora sen sijaan ei ole edellisen regressiosuoran peilikuva. Se ei kulje pisteiden välistä samalla tavalla kuin aiemmin. Syynä on se, että minimoitava neliösumma lasketaan uudesta kuvasta pystysuuntaisten erojen neliöiden summana, ja pystysuuntainten erojen neliösumman minimoiminen tuottaa eri tuloksen kuin vaakasuuntaisten erojen neliösumman minimoiminen.

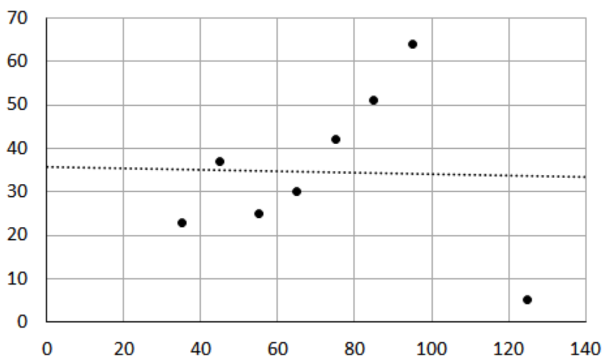


37. Poikkeava havainto on niin poikkeava, että se riittää vetämään regressiosuoran vaakaan:

a.



b.



5.8 KOMBINATORIIKKA

38. Merkitään mahdollisten järjestysten lukumäärää x:llä.

    a. $x = 2! = 2 \cdot 1 = 2$
    b. $x = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
    c. $x = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
    d. $x = 100! = 100 \cdot 99 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \approx 9{,}33 \cdot 10^{157}$

39. Merkitään mahdollisten yhdistelmien määrää x:llä. Tehtävässä käytetään *binomikaavaa*: $x = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ missä n on korttipakan korttien määrä ja k on vedettyjen korttien määrä.

    Ideana on, että vaikka korttipakan kortit voivat olla 52! eri järjestyksessä, ei pakkaan jäävien korttien keskinäisellä järjestyksellä ole merkitystä, kuten ei myöskään vedettyjen korttien keskinäisellä järjestyksellä.

    a. $x = \binom{52}{2} = \frac{52!}{2!(52-2)!} = \frac{52 \cdot 51}{2 \cdot 1} = 1\,326$
    b. $x = \binom{52}{3} = \frac{52!}{3!(52-3)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 22\,100$
    c. $x = \binom{52}{4} = \frac{52!}{4!(52-4)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 270\,725$

40. Tässäkin käytetään binomikaavaa. Logiikka on sama kuin edellisessä tehtävässä: nyt mustien pallojen keskinäisellä järjestyksellä ei ole väliä, kuten ei myöskään valkoisten pallojen keskinäisellä järjestyksellä.

    a. Kolme: musta pallo voi olla joko ensimmäisenä, toisena tai kolmantena. Binomikaava vahvistaa tämän: $x = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3$
    b. $x = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$
    c. $x = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$
    d. $x = \binom{15}{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3\,003$

5.9 KOMBINATORIIKKA JA TODENNÄKÖISYYS

41. Todennäköisyys sille, että saadaan *jonkinvärinen* ässä, sitten *samanväriset* kuningas, kuningatar, jätkä ja kymppi *tässä järjestyksessä* on $p = \frac{4}{52} \cdot \frac{1}{51} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{48}$. Vaihtoehtoisia viiden kortin järjestyksiä taas on 5!, joten

    $$x = 4 \cdot \frac{5!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = 4 \cdot \frac{5! \cdot 47!}{52!} = 4 \cdot \binom{52}{5}^{-1}$$

    Tämä käy järkeen, sillä erilaisia viiden kortin yhdistelmiä on $\binom{52}{5}$, ja näistä neljä on kuningasvärisuoria.

42. Kunkin nimenomaisen sarjan todennäköisyys on $\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Kun lasketaan sarjaan sisältyvien klaavojen määrä, ei sarjan sisäisellä järjestyksellä kuitenkaan ole väliä, joten saman klaavamäärän k antavia sarjoja on $\binom{4}{k}$ erilaista. Siten X:n eri arvojen todennäköisyydet ovat:

$X = 0\text{: tn} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{0} = \frac{1}{16}$

$X = 1\text{: tn} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{1} = \frac{4}{16}$

$X = 2\text{: tn} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{2} = \frac{6}{16}$

$X = 3\text{: tn} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{3} = \frac{4}{16}$

$X = 4\text{: tn} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \binom{4}{4} = \frac{1}{16}$

Kaikkien näiden vaihtoehtojen yhteenlaskettu todennäköisyys on yksi, kuten pitääkin.

43. Kunkin nimenomaisen sarjan todennäköisyys on $\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$, missä k on kutosten määrä ko. sarjassa.[3] Sarjan järjestyksellä ei ole väliä, joten saman kutosmäärän k antavia sarjoja on $\binom{4}{k}$ erilaista. Siten X:n eri arvojen todennäköisyydet ovat:

$X = 0\text{: tn} = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-0} \binom{4}{0} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$

$X = 1\text{: tn} = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} \binom{4}{1} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 4$

$X = 2\text{: tn} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2} \binom{4}{2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 6$

$X = 3\text{: tn} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-3} \binom{4}{3} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot 4$

$X = 4\text{: tn} = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-4} \binom{4}{4} = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

[3] Huom: emme tee eroa silmälukujen 1–5 välille. Ne kaikki ovat vain ”ei-kutosia”.